目　錄

第四章 廣義謂詞演算

附錄 原書第一版第四章最後幾節

導　　言

理論邏輯，又名數理邏輯或符號邏輯，是把數學上的形式方法應用到邏輯領域上去的結果．它（譯者按：指形式方法）在邏輯上使用一種形式語言，這語言在表示數學關係時早已使用．在今天，如果有人想只利用日常語言來建立數學的某一個部門，這只會被人當作烏托邦的空想．自古以來，在數學各部門中例如在代數學中所獲得的大進步，主要地可以說在於：它創造了一套有用的、有效率的形式體系．形式語言在數學上所已做到的，即能夠對它的對象作一個確切的、科學的處理，在理論邏輯上它也應當做到．的確，判斷、概念等等之間的邏輯關係現在可用公式來表達而絕不致於有含糊的解釋，但在語言的表達式中，這含糊却是極易出現的．根據三段論所作的邏輯推理，現在被分解成最基本的元素而且表示成由開始公式出發根據某些規則而作的形式變形，這些規則又與代數學中的演算規則非常類似；邏輯思考便反映成邏輯演算了．這個演算使得我們有可能去從事探索一些可獲得豐富結果的問題，而純粹內涵的邏輯思考對此，原則上是無能爲力的，例如，決定由某個已給的前提到底能夠推出那些命題等等都屬於這類問題．近數十年來邏輯演算顯得特別重要，因爲這時它已經發展成爲對數學基礎的探求來說是一個不可缺少的工具了．

數理邏輯這個思想首先是由萊布尼茲明顯說出的．德莫干（1806—1876）與布爾（1815—1864）得到一些初步結果．以後的整個發展都根原於布爾．他的後繼者耶方斯（1835—1882）尤其是皮爾斯（1839—1914）更豐富了這年青的科學．施累德在他的"邏輯代數講義"（1890—1895）一書中把他的前輩的各種各樣的結果作

有系統的收集及補充，這書可算是由布爾開始發展路線的一個總結.

由於數學要求精確的基礎以及要求有嚴格公理的處理，這又使得邏輯得到了新的推動力，這部分地與布爾-施累德代數的發展並無關係. 這時弗雷格發表了他的"計算概念"(1879)以及"算術的基本法則"(1893—1903)兩書. 皮亞諾與他的合作者在 1894 年開始出版了"數學公式"一書，它把各部門數學都表達於邏輯演算之中. 懷特黑與羅素的"數學原理"(1910—1913)的出現，更是這個發展的一個高峯. 最近，希爾柏脫在一系列的論文與大學講義中，應用邏輯演算來找出一條建立數學的新路，使得它的基本假設的不矛盾性可以確認出來. 這個研究的目前情況已由下書加以總結：希爾柏脫與伯爾奈斯的數學基礎，第一册(1934)，第二册(1939).

第　一　章

命　題　演　算

命題演算構成了數理邏輯的最初的、不可缺少的部分. 所謂命題是指每一個有意義的文句,由它的內容可以斷定是眞的或假的. 例如,下面這些便是命題:“數學是一門科學”,“雪是黑的”,“9是質數”等等. 在命題演算中,我們並不深入考究各命題內部的更細緻的邏輯結構,即大體上可表示爲謂詞與主詞之間的關係的那種結構,反之,在命題演算中,凡一命題與其它命題作邏輯聯結時,我們都把它當作一個整體而處理的.

§1. 基本邏輯聯結詞的引入

我們可以用一定方式把一些命題聯結而成新命題. 例如,由兩個命題“2小於3”及“雪是黑的”可以組成一些新命題:“2小於3與雪是黑的”,“2小於3或雪是黑的”,“如果2小於3則雪是黑的”. 最後,由“2小於3”可以組成一新命題“2不小於3”,它表達前一命題的邏輯反面(否定).

在語言上,這些命題的聯結是通過“與”“或”“如果…則”“非”諸字而給出的.

現在我們想把命題間這些基本聯結用適當的符號來表達. 我們用大寫拉丁字母 $X, Y, Z, U, \cdots$ 等作爲命題的記號. 爲要表示命題的邏輯聯結我們引入下列五個記號:

1. $\overline{X}$(讀作“非 X”)表示 X 的矛盾的否定. $\overline{X}$ 意指下列的命題:當 X 假時它便眞,當 X 眞時它便假.

2．$X \& Y$（讀作"X 與 Y"）表示下列命題，它爲眞當且僅當 X 與 Y 都眞時．

3．$X \vee Y$（讀作"X 或 Y"）表示下列命題，它爲眞當且僅當兩命題 X, Y 至少有一爲眞時．

4．$X \rightarrow Y$（讀作"如果 X，則 Y"）表示下列命題，它爲假當且僅當 X 眞而 Y 假時．

5．$X \sim Y$（讀作"X 等價 Y"）又寫爲 $X \rightleftarrows Y$ 或 $X \leftrightarrow Y$，表示下列命題，它爲眞當且僅當 X, Y 並眞或 X, Y 並假時．因此，$X \sim Y$ 是指，X 與 Y 有相同的眞假値．

對 3 我們要注意，不要把"X 或 Y"中的聯結詞"或"字誤解爲互斥的"或"（不並眞性的"或"），如拉丁文 aut–aut 那樣，這個"或"是有相容性（並眞性）的意義，如拉丁文"vel"那樣，即是說，X 與 Y 同時成立的可能性是容許的[1]．

複合句"如果 X，則 Y"不應理解爲表示存在於原因與結果之間的那種關係．事實上，只要 X 是一個假命題或者 Y 是一個眞命題，那末命題 $X \rightarrow Y$ 便已經恆眞了．

因此，下列的命題須認爲是眞的：

如果 2 倍 2 爲 4，則雪是白的．

如果 2 倍 2 爲 5，則雪是白的．

如果 2 倍 2 爲 5，則雪是黑的．

反之，以下命題是假的："如果 2 倍 2 爲 4，則雪是黑的"．儘管如此，關係 $X \rightarrow Y$ 與因果關係這兩者之間仍然有一共同點：在 $X \rightarrow Y$ 爲眞的情形下，由 X 之成立可以推出 Y 之成立．

關係 $X \sim Y$ 並沒有下列的意義，即 X 與 Y 同義，這關係在任意兩個眞命題之間以及任意兩個假命題之間成立．例如，下列命

---

1) 互斥性的"或"可通過基本記號的結合而表示．"或 X 或 Y"（互斥性的）乃 $X \sim Y$ 的否定，因此可表示爲 $\overline{X \sim Y}$．（譯者按，中文的"抑"如"求之歟抑與之歟"，可算是互斥性的"或"）

題是眞的:

$$(2\text{與}2\text{爲}4)\sim(\text{雪是白的})$$

$$(2>3)\sim(\text{雪是黑的}).$$

下列附註特別重要. 依照我們對於基本聯結詞的定義,可知一複合命題的眞或假只依賴於所聯結的命題的眞或假, 與它們的含意無關. 設爲簡短起見, 把眞命題記爲 $\mathfrak{W}$ 而把假命題記爲 $\mathfrak{F}$, 那末聯結詞→可刻畫如下: 命題 $\mathfrak{W}\to\mathfrak{W}$, $\mathfrak{F}\to\mathfrak{W}$ 與 $\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ 是眞的, 而 $\mathfrak{W}\to\mathfrak{F}$ 是假的. 對於聯結詞 & 則: $\mathfrak{W}\,\&\,\mathfrak{W}$ 是眞,而 $\mathfrak{W}\,\&\,\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\,\&\,\mathfrak{W}$, $\mathfrak{F}\,\&\,\mathfrak{F}$ 皆假. 此外, $\mathfrak{W}\vee\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}\vee\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\vee\mathfrak{W}$ 是眞,而 $\mathfrak{F}\vee\mathfrak{F}$ 爲假. 聯結詞～則刻畫如下: $\mathfrak{W}\sim\mathfrak{W}$, $\mathfrak{F}\sim\mathfrak{F}$ 是眞,但 $\mathfrak{W}\sim\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\sim\mathfrak{W}$ 爲假. 最後, $\overline{\mathfrak{W}}$ 假而 $\overline{\mathfrak{F}}$ 眞. 因此我們可以有權把基本聯結詞理解爲眞值函數,這些函數只以 $\mathfrak{W}$ 與 $\mathfrak{F}$ 兩者作爲變目的值與函數的值.

對於所引入的運算還有形式上的刻畫如下: 否定詞 $\bar{X}$ 是一元的而其它的運算都是二元的.

§2. 等值性;基本聯結詞的可省約性

通過多次的使用基本聯結詞可以從一些給定的命題而組成一些更複雜的複合命題, 例如, 由基本命題 X,Y,Z 可作出複合命題 $((X\to Y)\,\&\,(Y\to Z))\,\&\,(X\vee Z)$. 正如基本聯結詞一樣,每一個這樣的複合命題也表示一個確定的眞值函數. 就上述的複合命題而論, 須注意對於 X,Y,Z 的眞假值分配共有八個可能, 即 $\mathfrak{WWW}$; $\mathfrak{WWF}$; $\mathfrak{WFW}$; $\mathfrak{WFF}$; $\mathfrak{FWW}$; $\mathfrak{FWF}$; $\mathfrak{FFW}$; $\mathfrak{FFF}$. 這些值的每一個分配都通過

$$((X\to Y)\,\&\,(Y\to Z))\,\&\,(X\vee Z)$$

而對應於一值 $\mathfrak{W}$ 或 $\mathfrak{F}$. 例如 $\mathfrak{FWF}$ 組對應於值 $\mathfrak{F}$. 事實上,我們可依照基本聯結詞的定義而把

$$((\mathfrak{F}\to\mathfrak{W})\,\&\,(\mathfrak{W}\to\mathfrak{F}))\,\&\,(\mathfrak{F}\vee\mathfrak{F})$$

換爲

$$(\mathfrak{W}\,\&\,\mathfrak{F})\,\&\,\mathfrak{F}$$

再得 𝔉 & 𝔉,最後得 𝔉.

值得注意的是,基本聯結詞有好些不同的組合是同意義的,即表示同一的眞值函數的. 例如,$\bar{\bar{X}}$ 與 X 同意義;即雙重否定與肯定是一樣的. 事實上,$\bar{\bar{X}}$ 與 X 同樣,當代入 ℜ 時得值 ℜ,而代入 𝔉 時得值 𝔉. 像這種同意義的複合命題我們今後叫做"等值". 並簡寫爲:

$$\bar{\bar{X}} \text{ 等 } X^{1)}. \tag{1}$$

下面我們將列出一系列其它的等值式. 首先,可以看出,記號 & 與 ∨ 在運算方式上與代數中的記號"+"與"·"是很類似的. 即,下列的等值式成立:

$$X \,\&\, Y \text{ 等 } Y \,\&\, X \tag{2}$$

$$X \,\&\, (Y \,\&\, Z) \text{ 等 } (X \,\&\, Y) \,\&\, Z \tag{3}$$

$$X \vee Y \text{ 等 } Y \vee X \tag{4}$$

$$X \vee (Y \vee Z) \text{ 等 } (X \vee Y) \vee Z \tag{5}$$

$$X \vee (Y \,\&\, Z) \text{ 等 } (X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z). \tag{6}$$

正如上述,這些(以及所有其餘的)等值式可用下法證明. 我們對基本命題任意給以 ℜ 與 𝔉 而作出所有可能的組合,從而證明,對於每一個組合,所討論的等值式的兩邊每次都給出相同的眞假值. 這個證明由讀者自證.

由等值式(2)至(6)可以得到可換律,結合律及分配律. 因爲它們與代數學有這種類似,所以亦有人把 $X \,\&\, Y$ 叫做邏輯和而把 $X \vee Y$ 叫做邏輯積. 由上述定律可得,在邏輯表達式中,可照代數方式而"乘出"或者把一個公共因子提出於括號之外. 此外我們還可以把 $X \,\&\, Y$ 叫做邏輯積而把 $X \vee Y$ 叫做邏輯和,在邏輯界中後面

---

1) 必須注意,這裏所用的縮寫記號"等"並不屬於我們的邏輯記號. 譯者按,原著者把這關係叫做"äquivalenz"而把 $X \sim Y$ 的關係叫做"gleichwertig",與通常習慣不大相合,故今改正.

這名稱更爲通行. 因爲這與代數不同,我們還有第二分配律

$$X \,\&\, (Y \vee Z) \text{ 等 } (X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, Z). \tag{7}$$

下例可以解釋第二分配律:有一個天氣預報說:"今天下雨,而明天天晴或後天天晴". 這個斷言亦可表達如下:"今天下雨而明天天晴,或今天下雨而後天天晴".

因爲邏輯界中關於"和""積"兩字的用語並不一致,我們願意根本避免這兩個名詞. 我們今把 $X \,\&\, Y$ 叫做 X 與 Y 的**合取**,而 $X \vee Y$ 叫做 X 與 Y 的**析取**. 對於 $X \rightarrow Y$ 則用蘊涵的名稱.

由於我們有可換律與結合律,所以多項的合取與析取可以不用括號. 爲了今後節省括號起見,我們還規定, $\vee$ 的結合力強於 $\&$,而 $\&$ 又強於 $\rightarrow$ 與 $\sim$. 記號 $\vee$ 又可如代數中的記號"·"一樣地省去.

要簡化合取式與析取式,下列兩個等值式是主要的:

$$X \,\&\, X \text{ 等 } X, \tag{8}$$

$$X \vee X \text{ 等 } X. \tag{9}$$

因此在一個合取式或析取式中,如果其中有一項出現多次,則它只須寫一次便成. 下列兩個等值式也很適宜於把複雜的複合命題化爲簡單的命題:

$$X \,\&\, \mathfrak{R} \text{ 等 } X, \tag{10}$$

$$X \,\&\, \mathfrak{F} \text{ 等 } \mathfrak{F}. \tag{11}$$

(10) 說明眞確的合取項永遠可以省去, (11) 說明, 在一個合取式中,只要有一個假命題項出現,該合取式卽爲假.

相應地對於析取式我們有

$$X \vee \mathfrak{R} \text{ 等 } \mathfrak{R}, \tag{12}$$

$$X \vee \mathfrak{F} \text{ 等 } X. \tag{13}$$

如果含有一個眞確的項,則析取式爲眞. 在析取式中一個假的項可以删去.

對於蘊涵式我們亦有相似的關係:

$$\mathfrak{R}\to X \text{ 等 } X,\; X\to\mathfrak{F} \text{ 等 } \overline{X}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{F}\to X \text{ 等 } \mathfrak{R},\; X\to\mathfrak{R} \text{ 等 } \mathfrak{R}. \tag{15}$$

一個蘊涵式而有眞前件(假後件),則該式與它的後件(前件的否定)相等值. 一個蘊涵式而有假前件(眞後件)則永遠表示一個眞命題.

最後,對於等價關係我們有

$$X\sim\mathfrak{R} \text{ 等 } X, \tag{16}$$

$$X\sim\mathfrak{F} \text{ 等 } \overline{X}. \tag{17}$$

至於否定詞同 & 與 ∨ 的組合,則下列關係是主要的:

$$\overline{X \,\&\, Y} \text{ 等 } \overline{X}\vee\overline{Y}. \tag{18}$$

例如,設 X 表示斷言"三角形△是直角的",Y 表示"三角形△是等腰的",則複合命題 $X \,\&\, Y$ 相應於命題:"三角形△是直角的與三角形△是等腰的". 它的矛盾否定便是以下命題:"三角形△不是直角的或三角形△不是等腰的",而這命題可表爲 $\overline{X}\vee\overline{Y}$.

同樣又有

$$\overline{X\vee Y} \text{ 等 } \overline{X} \,\&\, \overline{Y}. \tag{19}$$

例如,假定某一個數學考試要求應試者至少要精通算術與幾何兩部門之一. 設 X 指以下命題:"應試者精通算術",Y 表示"應試者精通幾何". 如果 $X\vee Y$ 爲眞,則應試者將滿足這個考試的要求. 如果應試者在考試中落第了,那便是 $X\vee Y$ 的否定成立,因而便意指:"應試者不精通算術亦不精通幾何",而這便表爲 $\overline{X} \,\&\, \overline{Y}$.

如果我們利用記號→與~,又得到更多的等值式.

命題 $X\to Y$ 意指,不可能同時 X 眞而 Y 假,故有

$$X\to Y \text{ 等 } \overline{X \,\&\, \overline{Y}}. \tag{20}$$

如果引用(18),我們可把 $\overline{X \,\&\, \overline{Y}}$ 寫爲 $\overline{X}\vee\overline{\overline{Y}}$,再依照(1)可寫成 $\overline{X}\vee Y$. 因此又有

$$X\to Y \text{ 等 } \overline{X}\vee Y. \tag{21}$$

若把這等值式中的 X 代以 $\overline{X}$,並利用 $\overline{\overline{X}}$ 等 X 一式,我們又得

到一個新關係式

$$X \vee Y \text{ 等 } \bar{X} \to Y. \tag{22}$$

依照(20)有 $\bar{Y} \to \bar{X}$ 等 $\overline{\bar{Y} \,\&\, \bar{\bar{X}}}$. 依照(1)右端可換成 $\overline{\bar{Y} \,\&\, X}$,依照(2)再換為 $\overline{X \,\&\, \bar{Y}}$,再依照(20)換為 $X \to Y$. 由此便得

$$X \to Y \text{ 等 } \bar{Y} \to \bar{X}. \tag{23}$$

如果兩命題 $X \to Y$ 與 $Y \to X$ 都眞確,那便是說,不可能同時 X 眞而 Y 假,也不可能同時 Y 眞而 X 假　因此,命題$(X \to Y) \,\&\, (Y \to X)$ 便意指: X 與 Y 有同樣的眞假值. 換句話說,我們有下列的等值式

$$X \sim Y \text{ 等 } (X \to Y) \,\&\, (Y \to X). \tag{24}$$

依照聯結詞～的意義,直接可以得出

$$X \sim Y \text{ 等 } Y \sim X, \tag{25}$$

$$X \sim Y \text{ 等 } \bar{X} \sim \bar{Y}. \tag{26}$$

再由(19)與(18),把該等值式兩邊均取其否定,並注意,依照(1)雙重否定可以删去,我們便得

$$X \vee Y \text{ 等 } \overline{\bar{X} \,\&\, \bar{Y}}, \tag{27}$$

$$X \,\&\, Y \text{ 等 } \overline{\bar{X} \vee \bar{Y}}. \tag{28}$$

這些等值式表明了,通過我們上面所引入的符號以表示複合命題時,其表示方式是多種多樣的. 因此可提出一個問題,是否有一些基本邏輯聯結詞是多餘的. 回答是肯定的. 首先,由(24)可知,記號～是可省的,因為聯結詞 $X \sim Y$ 可由→與&而表達. 由(20)與(27)更得,→與∨亦是可省的,它們均可由&與¯而表達. 又由(21)與(28)可見,∨與¯是足夠的. 同樣,→與¯亦已足夠;因為首先,由(28)&可由∨與¯表達,而由(22),∨可由→與¯表達.

弗雷格以→與¯的表達式作為基本,而羅素則以∨與¯(但都用與此處所用的不同的符號). 最自然的是用&與¯的表達式,如布雷太諾 (Bretanos) 的判斷論一書中所用的. 但是特別適用的却是同時並用三個符號&∨¯,因為依照等值式(2)至(6),可以得

到一個特別簡單的關於邏輯表達式的計算.

只用～與‾不能把所有的聯結詞都表達出. 例如: $X \& Y$ 已經不能由這兩記號表達了. 爲了證明這點,我們先考慮只用 X 與 Y 兩個基本命題的情況. 我們考慮下列八個命題:

$$X;\ Y;\ \overline{X};\ \overline{Y};\ X\sim X;\ X\sim\overline{X};\ X\sim Y;\ X\sim\overline{Y}.$$

如果我們把這些命題之一加以否定, 或把這些命題中任意兩個用～加以聯結, 我們便得到一個仍然與這八個命題之一相等值的命題. 例如, 我們有 $(X\sim Y)\sim Y$ 等 X; $(X\sim Y)\sim(X\sim Y)$ 等 $X\sim X$ 等等. 因爲基本命題 X 與 Y 本身出現在這八個命題之中,所以每一命題, 只要是由 X 與 Y 經過運用～與‾而作成的, 都跟這八個命題之一相等值. 但是 $X \& Y$ 却不與這些命題中任何一個相等值. 如果有一個與 $X \& Y$ 相等值的複合命題,它只由～與‾組成, 但却還包含有別的基本命題 $Z, U, \cdots, T$ 等等,那末當把 $Z, U, \cdots, T$ 全部代以 X 時這等值式仍然成立. 這樣我們又回到上面的情形了.

在表達複合命題時否定詞是不可省的. 例如,如果不用否定詞,$\overline{X}$ 便無法表示. 用一個未定記號 X 通過 $\& \ \vee \rightarrow \sim$ 而組成的所有命題只能表出有下列性質的命題,即當 X 爲眞時它也眞,但是 $\overline{X}$ 却與 X 有相反的眞假值.

值得注意的是, 聯結詞 $\vee$ 可僅由→來表達而無須借否定記號‾之助. 事實上我們有

$$X \vee Y \text{ 等 } (X\rightarrow Y)\rightarrow Y.$$

對於 $X \& Y$,這樣的表示是不可能的.

很奇怪的,可以順便一提,即如舍佛 (Sheffer) 所指出的, 可以只用一個邏輯記號就夠了. 他只用一個基本聯結詞 $X|Y$, 讀爲: "X 與 Y 不同時成立". 這樣,$X|X$ 便與 $\overline{X}$ 同意義,而$(X|X)|(Y|Y)$ 便等值於 $\overline{X}|\overline{Y}$ 即 $X\vee Y$. 因爲 $\vee$ 與‾可通過舍佛的豎記號而表達,所以其它的基本聯結詞亦然.

我們還要提一提下面的等值式，當表達等價關係時，它們是很重要的：

$$X \sim Y \text{ 等 } \bar{X} \vee Y \,\&\, \bar{Y} \vee X, \tag{29}$$

$$X \sim Y \text{ 等 } (X \,\&\, Y)(\bar{X} \,\&\, \bar{Y}). \tag{30}$$

(29)是由(24)得來的，只要把其中的$\rightarrow$依照(21)換爲$\vee$與$\bar{\ }$便成．(30)則直接由$\sim$的意義得出．

§3.　邏輯表達式的範式

上面我們已經看見，由一定的基本命題，記爲$X, Y, Z, \cdots$，在經過一次或多次的運用聯結詞$\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bar{\ }$後如何可以作出一些新的命題來．上一節所建立的等值式却告訴我們，內容上同意義的複合命題却可以有多種多樣的表示，我們可以隨意地由一個變到另一個．現在值得注意的是，**每一個複合命題都可以經過一個等值變形而變成一個範式**；這個範式乃由一些析取式的合取而組成，其中每一個析取項或者是一個基本命題；或者是基本命題的否定．

根據已經建立的等值式，我們可以作出下列的關於表達式的變形規則：

a1) 關於記號$\&$與$\vee$的演算，可和代數學一樣，使用結合律、可換律及分配律．

a2) $\bar{\bar{X}}$可換爲X．

a3) $\overline{X \,\&\, Y}$可寫爲$\bar{X} \vee \bar{Y}$，$\overline{X \vee Y}$可寫爲$\bar{X} \,\&\, \bar{Y}$．

a4) $X \rightarrow Y$可換爲$\bar{X} \vee Y$，$X \sim Y$可換爲$\bar{X}Y \,\&\, \bar{Y}X$[1]．

這裏指的都是相互可換性．

上述變形可照下列方式進行：首先利用規則a4)，把每一個表

1) 爲方便，這裏及以後我們經常使用上面提及的寫法，即把記號$\vee$省去（譯者按，上面式(30)已經用到這種寫法了）．

達式都換為另一個與它等值的式子，其中不再含有記號 → 與 ～. 因此所得的表達式便只應用三個記號 & ∨ ¯ 而構成. 繼續的運用規則 a3)，可以把否定記號永遠的向內深入，結果它便只能放在基本命題之上. 例如，由

$$\overline{(XY \& \overline{Y}) \vee (Z \& Y)}$$

先得

$$\overline{(XY \& \overline{Y})} \& \overline{(Z \& Y)},$$

再一次應用 a3)，得

$$\overline{XY} \vee \bar{\bar{Y}} \& \bar{Z} \vee \bar{Y},$$

最後得

$$(\bar{\bar{X}} \& \bar{Y})\bar{\bar{Y}} \& \bar{Z}\bar{Y}.$$

所得的表達式是由否定的與非否定的基本命題通過 & 與 ∨ 而組成. 這時可再利用分配律. 在我們的例子裏，這時便得

$$\bar{X}\bar{\bar{Y}} \& \bar{Y}\bar{\bar{Y}} \& \bar{Z}\bar{Y}.$$

最後依照 a2)，把 $\bar{\bar{X}}$ 換為 X，$\bar{\bar{\bar{X}}}$ 換為 $\bar{X}$ 等等，這表達式便變成範式了.

作為另一例子，我們考慮表達式

$$(X \rightarrow Y) \sim (\bar{Y} \rightarrow \bar{X}).$$

首先，可依照 a4) 把記號 → 除去，我們得

$$\bar{X}Y \sim \bar{\bar{Y}}\bar{X}.$$

把 $\bar{\bar{Y}}$ 換為 Y 得

$$\bar{X}Y \sim Y\bar{X}.$$

再一次運用 a4) 我們得

$$\overline{(\bar{X}Y)}Y\bar{X} \& \overline{(Y\bar{X})}\bar{X}Y,$$

$$(\bar{\bar{X}} \& \bar{Y})Y\bar{X} \& (\bar{Y} \& \bar{\bar{X}})\bar{X}Y \text{ [依照 a3)]}.$$

把 $\bar{\bar{X}}$ 換為 X 得

$$(X \& \bar{Y})Y\bar{X} \& (\bar{Y} \& X)\bar{X}Y.$$

再應用分配律我們便得

$$X Y \bar{X} \mathbin{\&} \bar{Y} Y \bar{X} \mathbin{\&} \bar{Y} \bar{X} Y \mathbin{\&} X \bar{X} Y$$

這便是 $(X \rightarrow Y) \sim (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})$ 的一個範式.

還須注意,一個複合命題的範式並非唯一的. 例如,依照(29)可知 $X \sim Y$ 的範式為 $\bar{X} Y \mathbin{\&} \bar{Y} X$. 另一方面,如果我們在(30)的右邊應用分配律又得

$$X \bar{X} \mathbin{\&} X \bar{Y} \mathbin{\&} Y \bar{X} \mathbin{\&} Y \bar{Y}.$$

§4. 永眞的複合命題的刻畫

一個由基本命題 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 借助於邏輯記號 &, V, →, ~, 用一定的方式而構成的複合命題,它是眞是假,完全依賴於各基本命題的眞假性作如何分配而定. 如果把一個複合命題中一個部分命題用另一個與它等價的命題替換了,這個複合命題的眞假值不變. 由此可見,在我們的演算中,記號~與代數中的記號 = 有同樣的作用[1].

邏輯學的第一個任務是:找出那些永遠是眞的複合命題,即其眞確性與基本命題是否表示眞的斷言或假的斷言是無關的.

因為對於每一個邏輯表達式我們都可以給出一個與它等值的範式,因此要回答這個問題,需要判定,一個具有範式的表達式在什麼時候是表示一個永眞的複合命題的. 借助於下列容易證實的規則便可以判定了:

b1) $X \bar{X}$ 永眞.

b2) 如果 X 眞而 Y 為隨意一個命題,則 XY 亦眞.

b3) 如果 X 眞, Y 眞,則 $X \mathbin{\&} Y$ 亦眞.

這些規則作如下的理解: X 與 Y 可代入隨便一個命題或複合

1) 在上文的討論中,有相同眞假值的命題是用"等"(即等值)表示的,著者已強調符號"等"並非系統內的符號,更與符號~無關. 因此這句話目前沒有根據(它當然對的,但要利用下文 §11 的規則VI才能證明)——譯者註.

命題[1]).

根據規則 b1) b2) b3) 及 a1) 可得，所有具有下列特徵的範式表達式都可確認爲眞的，即在它的每一個析取式中，至少有一個基本命題與它的否定同時出現．這樣的表達式不論基本命題的內容如何都恆表示眞命題，可以直接由否定詞的意義以及聯結詞"與""或"的意義而得出．但此外也再沒有其它的永眞表達式了．因爲設某一個範式有某一個合取項，這項當然是一個析取式，其中每一個基本命題都只是當作一個非否定的或者只是當作一個否定的因子而出現，那末我們便可以把這個析取式變成一個假命題，只要把非否定的命題記號以假命題代入，把被否定的命題記號以眞命題代入便成． 這個範式便有一個合取項是表示假命題的，因而全個表達式便必然表示一個假命題，而與其它命題的記號作怎樣的代入無關．

我們想用一些例子指明，依照上述方法如何證明一些命題永是眞的．

1．$X \sim X$.

依照規則 a4) 而變形得

$$\bar{X}X \,\&\, \bar{X}X.$$

這是個具有範式的表達式，它的每一個合取項中都有一個基本命題及其否定出現，因此便是眞的．

2．$X \,\&\, Y \rightarrow X$.

變形得

$$\overline{X \,\&\, Y} \vee X \text{ [依照 a4)]},$$

$$\bar{X}\bar{Y}X \text{ [依照 a3)]}.$$

---

1) 本書全文均以大寫拉丁字母表基本命題，而以德文字母表結構不明的命題(見次節)，故 b2) 的 X 及 b3) 的 X, Y 均該用德文字母才對—— 譯者註．

最後的析取式含有 X 及 $\overline{X}$,故是眞的.

3. $(X \,\&\, (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y$.

我們有

$\overline{X \,\&\, \overline{X}Y} \vee Y$　[兩次應用 a4)而得],

$\overline{X}(\overline{\overline{X}} \,\&\, \overline{Y})Y$　[依照 a3)],

$\overline{X}\overline{\overline{X}}Y \,\&\, \overline{X}\overline{Y}Y$　[依照 a1)],

$\overline{X}XY \,\&\, \overline{X}\overline{Y}Y$　[依照 a2)].

第一個析取式含有 X 與 $\overline{X}$, 第二个析取式含有 Y 與 $\overline{Y}$, 因此 $(X \,\&\, (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y$, 便是一個永眞的複合命題.

§5. 對偶原則

由規則 a3), 我們可注意一點, 它對於刻畫我們的演算是非常重要的. 由這規則可得, **每一個表達式,如果只由基本命題及其否定通過合取詞與析取詞而組成,則它的否定可用下法得到,即把符號 & 與 ∨ 互換,把基本命題與其否定互換.**

對此我們可作如下的應用. 設有一個 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ 形的表達式, 亦即有一個邏輯等式,已經證明爲永眞(我們用德文字母表示一個不規定其準確的形式結構的複合命題,有時又用來表示縮寫). 因爲 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ 與 $\overline{\mathfrak{A}} \sim \overline{\mathfrak{B}}$ 同意義(譯者按,指等值),所以如果我們把等式兩邊都作其否定,我們又得到另外一個眞的表達式. 如果這等式兩邊只由基本命題及其否定通過合取詞與析取詞而組成, 那末我們便可以應用上述的規則. 這樣我們便得到一個公式,它由開始的等式依照下法而作出:記號 & 與 ∨ 互換,而基本命題與其否定互換. 因爲這個等式是永眞的,所以我們可以把其中的基本命題再用其否定代入. 但這樣一來,我們當初便不必把基本命題與其否定互換了.

因此, 我們得下面的對偶原則: **設有一個永遠眞確的公式 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, 其兩邊只由基本命題與其否定通過合取詞與析取詞而組成,如果把其中 & 與 ∨ 彼此互換,我們又得到一個永眞的等式**[1].

例如

$$X(Y \,\&\, Z) \sim XY \,\&\, XZ$$

是永遠眞確的，它就是第一分配律公式． 由它，根據對偶原則，我們得下公式

$$X \,\&\, YZ \sim (X \,\&\, Y)(X \,\&\, Z),$$

這同樣是永眞的，並表示第二分配律．

同樣，由以下永眞公式

$$(X \,\&\, \overline{X})Y \sim Y,$$

根據對偶原則同樣可得一個永遠眞確的公式

$$X\overline{X} \,\&\, Y \sim Y.$$

§6. 邏輯表達式的析取範式

從形成否定的規則中得出一個重要的應用． 我們已經看見，每一個邏輯表達式都可以變成一個範式．這個範式由一些析取式的合取而成，而每一個析取項都是一個否定的或非否定的基本命題． 一個表達式要變成這個範式可借助於規則 a1) 至 a4) 而得．此外我們還有**第二個範式**，它由一些合取式的析取而成． 每一個合取項都是一個否定的或非否定的基本命題．我們把這個範式叫做“**析取範式**”，而上面那個範式，爲區別起見，可叫做“**合取範式**”．

要把一個表達式變成析取範式，可依下列方式進行． 先取原表達式的否定，把它變成合取範式，再依我們的規則作成其否定．但我們亦可利用以下事實，即在規則 a1) 至 a4) 中，合取與析取是對偶的．

我們可以由合取範式看出一表達式是否永眞，同樣，借助於析取範式我們亦可決定它是否永假． 如果每一個析取項都包含有一

1) 仿第三章 §8 的討論可知，如果 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 爲已證明的永眞公式，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 的結構同正文，則把 & 與 $\vee$ 互換並把前後件對調後，我們又得一個永眞公式——譯者註．

個基本命題及其否定,那末它便是永假了.

如果我們考慮到,一個析取範式的否定就是一個合取範式(譯者按,依照上述的構作否定的規則而作成的),考慮到一公式之爲永假當且僅當它的否定是永眞,那末立刻可得到上面那句話的證明了.

作爲析取範式的應用的一例,我們考慮複合命題

$$\bar{X}Y \,\&\, \bar{Y}Z \,\&\, X \,\&\, \bar{Z}.$$

經過應用第二分配律,我們得到範式

$$(\bar{X} \,\&\, \bar{Y} \,\&\, X \,\&\, \bar{Z}) \vee (\bar{X} \,\&\, Z \,\&\, X \,\&\, \bar{Z}) \vee (Y \,\&\, \bar{Y} \,\&\, X \,\&\, \bar{Z}) \vee (Y \,\&\, Z \,\&\, X \,\&\, \bar{Z}).$$

這裏,每個析取項都含有一個基本命題及其否定,前兩項含有 X 及 $\bar{X}$,第三項含有 Y 與 $\bar{Y}$,第四項含有 Z 與 $\bar{Z}$. 因此,$\bar{X}Y \,\&\, \bar{Y}Z \,\&\, X \,\&\, \bar{Z}$ 便代表一個永假的命題.

析取範式有一個特別明晰的優點. 各個析取項能表示在所給的複合命題爲眞的各個可能性. 例如,$X \sim Y$ 所對應的析取範式爲 $(X \,\&\, Y)(\bar{X} \,\&\, \bar{Y})$,而這便使我們知道,要使得 $X \sim Y$ 爲眞,必須或者 X 與 Y 兩者並眞,或者 X 與 Y 兩者並假才成.

§7. 由一些給定的基本命題所能作成的複合命題的總體

關於命題演算還有一個重要的注意,這注意說的是關於由有限多個基本命題 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所能組合而成的命題的總體. 這裏我們只把不是彼此邏輯等值的命題當作不同的命題. 在這個前提之下,上述的總體只能包含有限多個命題.

正如我們前面已提到的,兩個由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 組成的命題彼此等值,當且僅當該兩個命題對 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意值時都有相同的眞假值. 首先,對於基本命題的眞或假來說,我們有 2^n 個可能性,因爲,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中的每一個命題都可眞可假. 對於這 2^n 個情形的每一個情形,如果我們都對某一個由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的命題規定了它爲眞或假以後,該命題便確定了. 由此可見,由

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的命題,其中彼此不相同的恰巧有 $2^{(2^n)}$ 個.

由 X 自己所組成的 4 個不同命題是

$$X;\ \overline{X};\ X \vee \overline{X};\ X \,\&\, \overline{X}.$$

由 X 與 Y 所組成的 16 個不同命題是

$$X;\ Y;\ X \,\&\, Y;\ X \vee Y;\ X \rightarrow Y;\ Y \rightarrow X;\ X \sim Y;\ X \vee \overline{X}$$

及它們的否定:

$$\overline{X};\ \overline{Y};\ \overline{X} \vee \overline{Y};\ \overline{X} \,\&\, \overline{Y};\ X \,\&\, \overline{Y};\ Y \,\&\, \overline{X};\ X \sim \overline{Y};\ X \,\&\, \overline{X}.$$

在這 $2^{(2^n)}$ 個命題中,有兩個是佔有特別地位的,卽永眞命題,它可表示爲 $X_1 \vee \overline{X}_1$ (或 $X_1 \sim X_1$) 及永假命題它可表示爲 $X_1 \,\&\, \overline{X}_1$.

對於由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 而組成的種種不同的命題可根據下列的定理而得到一個形式方面的綜括:

若依第一分配律而把

$$(X_1 \,\&\, \overline{X}_1) \vee (X_2 \,\&\, \overline{X}_2) \vee \cdots \vee (X_n \,\&\, \overline{X}_n)$$

展開,則由基本命題 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的每一個表達式都和所得的表達式中某一個部分合取式相等值. 只有永眞命題是唯一的例外. 但是我們亦可以把反常的部分合取式,卽把沒有合取項的合取式當作一個永遠眞確的命題. 施累德把上述的展開表達式中的各合取項叫做 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的組成要素.

上述斷言可證明如下[1]. 我們先把這個由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 而組成的表達式變成合取範式. 因爲如果我們把一個眞確的合取項除去,一表達式的眞假值並不改變,所以如果一合取項同時含有 X 與 $\overline{X}$, 我們無需寫出. 我們還可利用以下規則, 卽 $X \vee X$ 可換爲 X, 經此之後仍然留下來的每一個合取項,都是從 $X_1, \cdots, X_n, \overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_n$ 中的不同的項(並具有不同的足碼——譯者)所作的析取. 如果在一析取式中旣缺少 X_i 又缺少 $\overline{X}_i$,我們可以對這個析取式加入一個

1) 本證明須假定合取範式的存在性. 因此合取範式的存在性似亦須加以證明(上文只就由五大聯結詞所組成的複合命題而證明它必有合取範式, 但是否有一命題,它不能用五大聯結詞表達的?)——譯者註.

永假項$(X_i \& \overline{X}_i)$,再根據第一分配律展開,這樣整個命題的眞假值並不致於更改. 結果,對每一個 i 而言,每一個合取項都或者含有 X_i, 或者含有 $\overline{X}_i$. 如果有兩個合取項(譯者按, 每一個合取項都是一個析取式)只是其中析取的次序不同,那末我們便只需寫出其中之一. 這樣,該表達式便具有上面所要求的形式了.

這樣一來, 對於每一個由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的命題我們都有一個"特異"的合取範式.

這個範式是唯一的(或許合取項或析取項的次序可以不同),其意指:兩個等值的複合命題必用同一的範式表示. 因爲對於 $X_1, \cdots, X_n$ 共有 $2^{(2^n)}$ 個不同的範式(特異的——譯者)表示, 恰巧和由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的不同的命題的個數一樣多.

上述的特異範式有種種的應用. 首先,借它有時可以對一個給定的複合命題找出更簡單的表達式. 爲此,我們先把這個表達式變成特異範式,然後根據下列的消元規則而作出可能有的簡化:

$$X\mathfrak{A} \& \overline{X}\mathfrak{A}, \text{ 卽 } (X \& \overline{X}) \vee \mathfrak{A}$$

與 $\mathfrak{A}$ 等值.

作爲例子,我們試考慮命題 $A \& AB$. 爲了將它依照 A 與 B 而展開, 我們把合取項 A 換爲 $A \vee (B \& \overline{B})$, 並利用第一分配律把括號解開. 再把兩次出現的 AB 項只寫一次,我們便得到特異範式

$$AB \& A\overline{B}.$$

把 A 放在括號外便得 $A(B \& \overline{B})$, 再根據上述消元規則便得 A. 因此, A 便是 $A \& AB$ 的最簡單的表達式.

表達式 $A \& \overline{A}B$ 可作爲另一個例子. 這裏它的範式爲

$$AB \& A\overline{B} \& \overline{A}B.$$

這裏第一第二項以及第一第三項都可以合併起來. 爲了使兩處消元都可實行起見,我們把第一項重寫,得

$$(AB \& A\overline{B}) \& (AB \& \overline{A}B),$$

消元後便得 $A \& B$.

還可注意，由基本命題 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的一個命題，能否不用否定記號而表示這個問題，若借助於特異範式，我們便可以極容易地看出來。當且僅當所考慮的命題的特異範式中，合取項 $\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \cdots \vee \bar{X}_n$ 並未出現時，該命題可不用否定記號而表示。因爲，如果一個命題可由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 而不用否定詞而構成，則當 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都用眞命題代入時，這命題永是眞確的，但是含有合取項 $\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \cdots \vee \bar{X}_n$ 的命題却沒有這個性質。所以上述條件是必要的。另一方面，它也是充分的，因爲特異範式中每一項，只要它不是 $\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \cdots \vee \bar{X}_n$，我們都可不用否定詞而表示。例如

$$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3\cdots\bar{X}_n \text{ 可寫爲 } (X_2 \,\&\, X_3 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n) \rightarrow X_1,$$

$$X_1\bar{X}_2X_3\bar{X}_4X_5\bar{X}_6\cdots \text{可寫爲} (X_2 \,\&\, X_4 \,\&\, X_6\cdots) \rightarrow X_1 \vee X_3 \vee X_5 \vee \cdots \text{等等.}$$

因此在由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的 $2^{(2^n)}$ 個命題中，恰巧有一半是可以不用否定詞而表達的。

§8. 關於普遍有效性及可滿足性問題的補充注意

對一個由基本命題 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所組成的表達式而言，上述的特異範式亦可簡稱它爲依照 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的展開式。

設有一個複合命題，其中除 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 外，還含有基本命題 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$。對於這種命題，在一定意義下，我們還可以把它依照 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 而展開，即把該表達式表示爲一個合取式，其中每一個合取項都是兩個命題的析取，其一只與 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 有關，其一則爲 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的組成要素。

證明非常簡單。我們只須把該表達式依照所有其中出現的基本命題展開，即依照 $X_1, \cdots, X_n; Y_1, \cdots, Y_m$ 展開，再依照 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的組成要素而集項便得。

把一個表達式這樣地依照 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 而展開，具有一定的優點。我們已經看見，一個表達式的普遍有效性的判定問題，亦即對於一個已給定的邏輯表達式，要通過確定的、有限的程序來決定

它是否永遠眞確的問題，在命題演算中是完全解决了的. 這個問題的回答可通過合取範式而得到. 與普遍有效性問題相對偶的是**可滿足性**問題，即對於一個已給定的邏輯表達式，决定(仍然是通過確定的有限的程序——譯者)到底它永遠爲假還是有一個命題滿足它，即還是有一個命題使它爲眞這個問題. 這個問題的解决，可以通過析取範式而得到，或者把它的否定表達式變成合取範式亦可. 此外，與普遍有效性問題及可滿足性問題有關的還有其它的類似問題.

設有一個表達式，其中出現了基本命題 $X_1, X_2, \cdots, X_n$; $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$. 又設 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 是確定的、固定的命題. 我們問，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 應該滿足哪些條件，才使這個表達式對於任意選取的 X 都是眞的？ 又 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 滿足什麼條件，可使這個表達式永遠爲假？

爲了簡單起見，我們將就 $n = 2$ 而回答這個問題. 對於任意的 n，其解答是完全相似的. 試把這表達式依照 X_1 與 X_2 展開，得

$$\begin{aligned}&\Phi_1(Y_1, \cdots, Y_m)X_1X_2 \mathbin{\&} \Phi_2(Y_1, \cdots, Y_m)X_1\overline{X}_2 \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} \Phi_3(Y_1, \cdots, Y_m)\overline{X}_1X_2 \mathbin{\&} \Phi_4(Y_1, \cdots, Y_m)\overline{X}_1\overline{X}_2. \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

我們可以假設這 4 項是通通出現的. 例如，設缺少含 $X_1\overline{X}_2$ 的一項，我們便可以加入表達式 $\Phi_2(Y_1, \cdots, Y_m)X_1\overline{X}_2$，其中 $\Phi_2(Y_1, \cdots, Y_m)$ 是一個永遠眞確的複合命題.

我們斷言：**要使得公式(A)對於任意的 X_1 與 X_2 都是眞確的，其必要與充分條件是：命題 $\Phi_1(Y_1, \cdots, Y_m) \mathbin{\&} \Phi_2(Y_1, \cdots, Y_m) \mathbin{\&} \Phi_3(Y_1, \cdots, Y_m) \mathbin{\&} \Phi_4(Y_1, \cdots, Y_m)$ 是眞的.**

這條件的充分性是顯然的，但它亦是必要的. 因爲，比如說，如果 $\Phi_3(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 不眞，那末我們便把 X_1 代以一個眞命題而把 X_2 代以一個假命題. 這時(A)便與 $\Phi_3(Y_1, \cdots, Y_m)$ 等值，因而便不眞了.

相應地可以得到其對偶問題的解答. 表達式(A)對於 $X_1, \cdots,$

X_n 是可滿足的，只須而且必須 $Y_1, \cdots, Y_m$ 能滿足下式

$$\Phi_1(Y_1, \cdots, Y_m) \vee \Phi_2(Y_1, \cdots, Y_m) \vee \Phi_3(Y_1, \cdots, Y_m) \vee \Phi_4(Y_1, \cdots, Y_m).$$

§9. 由給定的公理而作的一切推論——系統性的綜覽

在 §4 中我們曾給出一個方法，它使我們能夠找出所有那些純粹邏輯地眞確的複合命題，又使我們能夠決定，某一個給定的複合命題是否具有這種性質. 現在發生一個新問題：由已給的一些假定（公理），試推出它的所有可能的推論，但這時所謂命題須當作不可分析的整體.

設想已給出了有限多個確定的公理 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_n$[1]. 今問另一個確定的複合命題 $\mathfrak{C}$ 是否這些公理的推論；這問題可以用前述的工具徹底回答. 因爲，當且僅當

$$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \cdots \,\&\, \mathfrak{A}_n) \rightarrow \mathfrak{C}$$

是一個普遍有效的邏輯公式時，我們便得到肯定的回答. 例如由 A 與 $A \rightarrow B$ 而推出 B 這個事實相應於下列公式的普遍有效性

$$(A \,\&\, (A \rightarrow B)) \rightarrow B.$$

但是對於可能作出的全體推論，我們還沒有一個系統性的綜覽. 對於這點，也還是特異合取範式幫助了我們.

設在我們的公理中出現有基本命題 $X_1, \cdots, X_n$. 設想把各公理都用 & 聯結起來，再把所得的複合命題依 $X_1, \cdots, X_n$ 而展開. 試考慮 $X_1, \cdots, X_n$ 的一個組成要素，並設它不是所得的特異範式中的一個合取項. 這時若對 $X_1, \cdots, X_n$ 適當地代以眞或假命題，這組成要素將變成全然是假命題的析取，因而變成一個假命題. 另一方面，作了這個代入以後，我們的特異範式却變成一個眞命題了：因爲，它的每一個合取項都與所考慮的組成要素有所差異，因而每個合取項的析取項中至少有一項是與所考慮的組成要素的一個析

1) 關於德文字母的用法參見 §5.

取項是相反的，代入結果每一個合取項都有一個眞的析取項，因而每個合取項都眞，隨而全式也便眞了. 因此所考慮的組成要素便不是這些公理的推論. 由此可知，根據這些公理所作的每一個推論，它的特異範式中所出現的組成要素，只能是那些已經在這些公理的展開式中已經出現了的.

根據這個考慮，要推出一系列公理的各個推論時，可依照下列的一般程序：

把所有的公理用 & 聯結起來，對所得的表達式作出其特異合取範式. 隨意的取出若干合取項並以 & 聯結之，這樣我們便得到該系列公理的一切結論，它還具有特異範式. 再借 19 頁所提到的消元規則之助，有時該結論可得到更簡單的寫法.

對上述的情形，卽以 A 及 $A\to B$ 作爲公理時，上述的程序如下：

先把　$A \mathbin{\&} (A\to B)$　依照 A 與 B 而展開，

$A \mathbin{\&} (A\to B)$　等　$A \mathbin{\&} \bar{A}B$,

$A \mathbin{\&} \bar{A}B$　等　$A(B \mathbin{\&} \bar{B}) \mathbin{\&} \bar{A}B$,

$A(B \mathbin{\&} \bar{B}) \mathbin{\&} \bar{A}B$　等　$AB \mathbin{\&} A\bar{B} \mathbin{\&} \bar{A}B$.

$AB \mathbin{\&} A\bar{B} \mathbin{\&} \bar{A}B$ 便是該系列公理的特異範式. 因此 $AB \mathbin{\&} \bar{A}B$ 等 $(A \mathbin{\&} \bar{A})B$ 等 B 便是這些公理的一個推論.

由 A 與 $A\to B$ 所得的其它推論爲：

$$AB;\ A\bar{B};\ \bar{A}B;\ AB \mathbin{\&} A\bar{B} \text{ 等 } A(B \mathbin{\&} \bar{B}) \text{ 等 } A;$$

$$A\bar{B} \mathbin{\&} \bar{A}B \text{ 等 } A\sim B,$$

自然還有

$$AB \mathbin{\&} A\bar{B} \mathbin{\&} \bar{A}B \text{ 等 } A \mathbin{\&} B.$$

如果我們還想得到一些推論，其中含有在公理中未曾出現的命題 C 的，那末這些公理不應該依照 A 與 B 而展開，而須依照 A, B, C 而展開.

另一個例子如下：設我們有兩個公理 $A\sim B$ 及 $B\sim C$. 我們先

把這些公理寫成範式

$$\bar{A}B \,\&\, \bar{B}A;\quad \bar{B}C \,\&\, \bar{C}B.$$

把這些假設依照 A,B,C 而展開,我們得

$$AB\bar{C} \,\&\, A\bar{B}C \,\&\, A\bar{B}\bar{C} \,\&\, \bar{A}BC \,\&\, \bar{A}B\bar{C} \,\&\, \bar{A}\bar{B}C.$$

這裏有一個推論,比如說,

$$AB\bar{C} \,\&\, A\bar{B}\bar{C} \,\&\, \bar{A}BC \,\&\, \bar{A}\bar{B}C.$$

集項得

$$A\bar{C}(B \,\&\, \bar{B}) \,\&\, \bar{A}C(B \,\&\, \bar{B})$$

或

$$A\bar{C} \,\&\, \bar{A}C \text{ 卽 } A\sim C.$$

對於這種推理的應用,我們還要舉出兩個例子.

設 A 指命題:“每個實數都是代數數”,而 B 指:“實數集是可數的”. 在數學中證明了下列事實:

首先, $A\rightarrow B$, 卽“如果每個實數都是代數數, 則實數集是可數的”.

其次,$\bar{B}$:卽“實數集不是可數的”.

以此作爲前提便是:

$$\bar{A}B \,\&\, \bar{B}$$

展開後得

$$\bar{A}B \,\&\, A\bar{B} \,\&\, \bar{A}\bar{B},$$

一個結論是 $\bar{A}B \,\&\, \bar{A}\bar{B}$ 等 $\bar{A}(B \,\&\, \bar{B})$ 等 $\bar{A}$,卽我們得出:

“並非每一實數都是代數數”, 這便是有關超越數的存在性的推論.

作爲第二個例子,設 A,B,C 分別表示

A: “速度的加法定理是眞的”.

B: “在恆星系中光以等速度沿各方向傳播”.

C: “在地球上光以等速度沿各方向傳播”.

首先,我們有數學定理: $(A \,\&\, B)\rightarrow\bar{C}$, 卽“如果速度的加法定

理是眞的,又如果在恆星系中光以等速度沿各方向傳播,則在地球上光傳播速度不能在各方向都相等".

其次,根據物理實驗,知 B 與 C 是眞的. 因此我們有下列公理:

$$(A \mathbin{\&} B)\rightarrow\bar{C};\ B;\ C.$$

這些假定的合取範式爲

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \mathbin{\&} B \mathbin{\&} C,$$

展開之得

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \mathbin{\&} BAC \mathbin{\&} BA\bar{C} \mathbin{\&} B\bar{A}C \mathbin{\&} B\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} CA\bar{B} \mathbin{\&} C\bar{A}\bar{B}.$$

這裏有一結論爲

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \mathbin{\&} B\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} B\bar{A}C \mathbin{\&} \bar{B}\bar{A}C.$$

經過集項後我們便得

$$(\bar{B} \mathbin{\&} B)\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} \bar{B})\bar{A}C,$$

$$\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} \bar{A}C,$$

$$(\bar{C} \mathbin{\&} C)\bar{A},$$

$$\bar{A}.$$

因此得出結論,速度加法定理不是眞的.

由任意兩個互相矛盾的公理可以推出隨意一個定理. 因爲,設我們把 A 與 $\bar{A}$ 作爲公理,而設 B 爲隨便一個命題. 那末將假定 $A \mathbin{\&} \bar{A}$ 依照 A 與 B 展開得

$$AB \mathbin{\&} A\bar{B} \mathbin{\&} \bar{A}B \mathbin{\&} \bar{A}\bar{B}.$$

因而得

$$AB \mathbin{\&} \bar{A}B,\ \text{故得}\ B.$$

上述的程序可以使我們作出已給公理的所有推論,換句話說,可以找出所有那些複合命題,它們比已給的命題更弱一些. 相反地,我們亦可問,有哪些複合命題它們比已給的命題更強一些? 卽,有哪些假定是以已給的命題作爲推論的? 對這問題的解答,亦可用類似的方法得到:先把結論依照所有的基本命題而展開,因而

得出一個特異範式. 我們從沒有出現的那些組成要素中任意選出一些,用 & 聯結到結論去,因而便得到所有可能的假定了.

§10. 命題演算的公理

命題演算論的公理形式可用下法得到: 我們選出一些永遠眞確的複合命題,再給出一些形式規則,依照這些規則能夠把所有其餘的永眞公式從所選出的公式推出來. 這些規則在邏輯演算中的作用,恰和邏輯推理在數學理論和在物理理論中的作用一樣. 邏輯推理所以不能在通常的(即顧及其含意的)方式下使用,是因爲我們目前的探究對象恰巧正是邏輯推理形式本身.

我們要把邏輯的基本公式(公理)與推導永眞公式的基本規則加以區別. 作爲邏輯基本公式我們使用下列四個:

a) $X \vee X \rightarrow X$.

b) $X \rightarrow X \vee Y$.

c) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$.

d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$.

第一個公理說, 如果一命題與它自身所作的析取爲眞, 則它爲眞. 第二個公理不外是 13 頁所提到的規則 b2)[1], 第三個公理是析取詞的可換性(譯者按, 可換性由它推出, 但它不是可換性本身),而第四個公理說,就一個眞蘊涵命題 $X \rightarrow Y$ 言, 可以把它的兩邊與任意一個命題 Z 用析取詞聯結之.

此外, 我們把記號 → 只當作縮寫而使用. $X \rightarrow Y$ 只是代替 $\overline{X} \vee Y$ 的一個方便寫法, 例如, 如果不用縮寫, 公理 a) 實際是指 $\overline{X \vee X} \vee X$.

想由作爲基本的開始公式或由已經推出的公式而得出新公

1) 這裏著者把"公理"和"規則"混亂了, 討論第四個公理時亦犯此誤——譯者註.

式,我們用下列兩個規則:

α) 代入規則

對於一個命題變元(即對於一個大寫拉丁字母)可代以一個複合命題,但必須在它所出現的每處地方,都代以相同的命題.

β) 蘊涵規則[1]

由 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ 兩公式可得一新公式 $\mathfrak{B}$.

下一節,我們將詳細地釋明,運用了這兩條規則後,如何地可從公理或已建立的公式而推出新公式來. 現在簡要地就有關命題演算的公理體系方面作一些一般性的註釋.

在建立公理系統時,我們只用聯結詞 $\vee$ 與 $\overline{}$. 這相應於上面已提及的事實,即這兩個聯結詞對於表示所有複合命題來說是足夠的. 爲了方便起見,當然我們亦用記號 $\rightarrow$, &, $\sim$. 但對於用到這些記號的公式,我們只理解爲它們僅僅是含有記號 $\vee$ 與 $\overline{}$ 的公式的縮寫. 因此,公式 $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ 當作 $\overline{\mathfrak{A}}\vee\mathfrak{B}$ 的縮寫, $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ 看作 $\overline{\overline{\mathfrak{A}}\vee\overline{\mathfrak{B}}}$ 的縮寫, 而 $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ 當作 $(\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})\,\&\,(\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A})$ 即 $\overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}}\vee\mathfrak{B}}\vee\overline{\overline{\mathfrak{B}}\vee\mathfrak{A}}}$ 的縮寫(參見 §2 處的等值式(21),(28),(24)).

我們所用的公理系統基本上是懷特黑與羅素(數學原理 Principia Mathematica 第一版)所給出的. 他們還用到另一個公理

$$X\vee(Y\vee Z)\rightarrow Y\vee(X\vee Z),$$

即表示析取詞的結合性的,後來却證明這公理是多餘的[2].

對表達所有複合命題這點說來,聯結詞 & 與 $\overline{}$,或 $\rightarrow$ 與 $\overline{}$ 同樣是足夠的,所以我們亦可以把只出現有 & 與 $\overline{}$ 或只有 $\rightarrow$ 與 $\overline{}$ 的公理列爲基本. 近年來後一種公理系統,即只以**蘊涵詞**及**否定詞**爲基本的系統現出一種特別的興趣. 首先給出這樣的公理系統的可

1) 若照原文直譯是"推理模式",今從英譯者改譯爲"蘊涵規則",此外又有名爲"分離原則"者——譯者註.

2) Bernays, P: Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica (數學原理的命題演算的公理探討). Math. Z. Bd. 25(1926).

以追溯到弗雷格[1]. 他這個系統除用我們的規則 α) 與 β) 外，還有下列六個公理:

1. $X\to(Y\to X)$,
2. $(X\to(Y\to Z))\to((X\to Y)\to(X\to Z))$,
3. $(X\to(Y\to Z))\to(Y\to(X\to Z))$,
4. $(X\to Y)\to(\overline{Y}\to\overline{X})$,
5. $\overline{\overline{X}}\to X$,
6. $X\to\overline{\overline{X}}$.

正如盧卡西維支 (J. Lukasiewicz) 所指出的，弗雷格這個公理系統可換以更簡的，只由下列三個公理所組成的系統:

1. $X\to(Y\to X)$,
2. $(X\to(Y\to Z))\to((X\to Y)\to(X\to Z))$,
3. $(\overline{X}\to\overline{Y})\to(Y\to X)$.

甚至於只用一個由蘊涵詞與否定詞所組成的公式作爲基本開始公式[2]也是可以的.

尼葛(J. Nicod)首先只用一個聯結詞，卽上文提到的舍佛(Sheffer) 的豎聯結詞 X/Y 而建立命題演算的公理系統[3]. 這個系統只用一個開始公式

$$[X/(Y/Z)]/\{[U/(U/U)]/[(V/Y)/((X/V)/(X/V))]\},$$

並把我們的蘊涵規則 β) 改爲下列規則: 由兩公式 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathfrak{A}/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C})$

---

1) Frege, G: Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens (表意文字:純粹思考的算術地仿造的形式語言). Halle, 1879.

2) Lukasiewicz, J. und Tarski, A.: Untersuchungen über den Aussagenkalkül (命題演算探究; C. R. Soc. Sci., Varsovie, Bd. 23, Klasse III, 華沙, 1930).

3) Nicod, J. G. P.: A reduction in the number of the primitive propositions of logic (邏輯原始命題個數的減約). Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 19(1917). 又參見 Quine, W. V.: A note on Nicod's postulate (關於尼葛的假設), Mind, Vol. 41.

我們可得新公式 $\mathfrak{C}$.

有時命題演算的公理系統，即一開始便把一切基本聯結詞都引進來的這種系統，也有其優點：即當我們要求把每一個基本聯結詞在邏輯推論中所起的作用都盡可能清晰地表示出來時．根據這個觀點而作出的公理系統已由希爾柏脫與伯爾奈斯給出[1]．

此外，我們的規則 a1) 至 a4)，b1) 至 b3)（見 §3 與 §4）也含有命題演算的一個公理系統．這個系統含有唯一的一個開始公式 $X \vee \overline{X}$ 以及 6 條用以推出新公式的規則．

最後，我們提出占有特殊地位的、由堅欽 (G. Gentzen) 所建立的"自然推理演算"[2]，它企圖使公式間的形式推理更近似於從前的兼顧內容的那種證明程序，例如數學中所常用的那種證明程序．這個演算不含有任何邏輯公理而只含有推理圖式，這些圖式指出了，由已給的一些假定可以作出哪些結論，又指出了，我們可以得出哪些與假定無關的(按即無條件地眞確的——譯者)公式．

§11. 由公理推演公式的例子

現在我們再回到由基本公式 a) 至 d) 以及推演規則 α) 與 β) 所組成的公理系統去．

我們將給出一系列的例子，它們是由公理嚴格形式地推演出公式的． 我們願意進行得慢些，因爲經驗證明，對初學者說來，保持純形式觀點是特別困難的．

在公式的推演中，值得把一些非常慣於重複出現的運算綜合

1) Hilbert, D. und Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik I (數學基礎), 66 頁.

2) Gentzen, G.: Untersuchung über das logische Schliessen I und II (邏輯推理的探究), Math. Z., Bd. 39 (1934). 類似的想法亦由 Jaskowski 獨立地發展了，見 Jaskowski, S.: On the rules of suppositions in formal logic (形式邏輯中假定的作用), Studia logica Nr. 1 (1934).

而成導出規則的形式，這樣的規則可以一次地預先給出相應的形式變形的結果．至於這種規則的證明則是：給出一個一般的程序，使得對於每一個具體情形都可以依照這程序而由基本規則來實現該變形．

規則 I．如果 $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}$ 爲可證明的公式，則 $\mathfrak{A}$ 亦然．

證明可直接由公理 a) 而得．經過對 a) 的代入我們有

$$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}.$$

又因爲 $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}$ 可證明，故由蘊涵規則便得出公式 $\mathfrak{A}$．

規則 II．如果 $\mathfrak{A}$ 是一個可證公式，而 $\mathfrak{B}$ 是隨便另一個公式，則 $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ 亦是一個可證公式．

這規則由公理 b) 得出，其得出的方法正和規則 I 之由 a) 得出一樣．

同樣，相應於公理 c) d) 我們有規則 III IV，總之，對於每一個表示蘊涵關係[1]的公式都有一個相應的規則（今後即簡稱爲相應於某某公式的規則——譯者）．

規則 III．如果 $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ 爲可證公式，則 $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A}$ 亦然．

規則 IV．如果 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 爲一個可證公式，而 $\mathfrak{C}$ 爲任意另一個公式，則 $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ 亦是一個可證公式．

公式(1)：$(X\to Y)\to[(Z\to X)\to(Z\to Y)]$．

證．把公理 d) 中的 Z 代以 $\bar{Z}$ 得 $(X\to Y)\to[\bar{Z}X\to\bar{Z}Y]$．如果我們把縮寫記號→換以它的定義的話，這就是公式(1)了．

規則 V．如果 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ 爲可證公式，則 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$ 亦是可證公式．

這規則相應於公式(1)．它可證明如下，在(1)中把 X, Y, Z 分別地以 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}$ 代入，再兩次應用蘊涵規則便得．

1) 原文叫做"推理關係"，但上文已強調"推理關係"與"蘊涵關係"不同，此處不應混用——譯者註．

公式(2): $\overline{X} \vee X$.

證. $X \to X \vee X$ [在 b) 中 Y 以 X 代入],

$X \vee X \to X$ [即 a)],

$X \to X$ [用規則 V].

最後的公式即 $\overline{X} \vee X$ 的縮寫.

公式(3): $X \vee \overline{X}$.

由(2)用規則 III 即得這公式.

公式(4): $X \to \overline{\overline{X}}$.

證. (4)是 $\overline{X}\overline{\overline{X}}$ 的縮寫. 而這公式由(3)把 X 代以 $\overline{X}$ 而得.

公式(5): $\overline{\overline{X}} \to X$.

證. $\overline{X} \to \overline{\overline{\overline{X}}}$ [(4)中作代入],

$X\overline{X} \to X\overline{\overline{\overline{X}}}$ [用規則 IV],

$X\overline{\overline{\overline{X}}}$ [加入(3),用規則 β)],

$\overline{\overline{\overline{X}}}X$ [用規則 III].

最後一式即公式(5).

公式(6): $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$.

證. $Y \to \overline{\overline{Y}}$ [公式(4)],

$\overline{X}Y \to \overline{X}\overline{\overline{Y}}$ [用規則 IV],

$\overline{X}\overline{\overline{Y}} \to \overline{\overline{Y}}\overline{X}$ [c) 中作代入],

$\overline{X}Y \to \overline{\overline{Y}}\overline{X}$ [用規則 V].

這便是所求的公式.

規則 VI. 如果表達式 $\mathfrak{A}$ 爲某一複合命題的成分, 在這意義下,該複合命題可表爲 $\Phi(\mathfrak{A})$,又如果 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 爲可證公式, 則 $\Phi(\mathfrak{A}) \to \Phi(\mathfrak{B})$ 與 $\Phi(\mathfrak{B}) \to \Phi(\mathfrak{A})$ 亦爲可證公式. 注意, 由 $\mathfrak{A}$ 的形式以及全表達式, 並不能唯一地決定 $\Phi(\mathfrak{A})$ 應該指什麼[1]. 例如,

1) 這裏的意思是指函數 Φ 可有不同解釋, 並非說複合命題 $\Phi(\mathfrak{A})$ 可以不同——譯者註.

表達式 $X \to XY$ 可以在三個意義之下記爲 $\Phi(X)$，因而 $\Phi(\mathfrak{A})$ 可以作爲三個表達式 $\mathfrak{A} \to XY$，$X \to \mathfrak{A}Y$，$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}Y$. 規則 VI 對於 $\Phi(\mathfrak{A})$ 的每一個定義都適用.

這規則亦可表示爲：**兩個互相蘊涵**(原文爲：有推論關係. 按這兩者並不全同，故今改正)**的表達式，在一個可證公式中可以彼此替換.**

證. 只就下列情形證明這規則便夠了，即 $\mathfrak{A}$ 只在 $\Phi(\mathfrak{A})$ 中出現一次，而 $\Phi(\mathfrak{A})$ 具有下列形式之一，$\overline{\mathfrak{A}}$，$\mathfrak{C}\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}\mathfrak{C}$. 至於一般情形的規則可以經過多次應用這個簡單規則而得. 因爲，若先把 $\Phi(\mathfrak{A})$ 由內而外地作成，然後對於 $\Phi(\mathfrak{A})$ 的每一個部分表達式 $\Phi'(\mathfrak{A})$ 我們都依次地得到

$$\Phi'(\mathfrak{B}) \to \Phi'(\mathfrak{A}) \text{ 與 } \Phi'(\mathfrak{A}) \to \Phi'(\mathfrak{B}).$$

今設 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 已經證明. 我們要證

α) $\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}$ 與 $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}$.

對公式(6)作代入便得

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$$

與

$$(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}),$$

並注意，$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 已經證明，因此便得到上述兩個公式.

β) $\mathfrak{C}\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}\mathfrak{B}$；$\mathfrak{C}\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\mathfrak{A}$.

這兩公式可由 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 及 $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 應用規則 IV 而得出.

γ) $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}\mathfrak{C}$；$\mathfrak{B}\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

我們多次使用公理 c) 及規則 V，可把這情形歸結到情形 β) 去.

由公理 c) 及規則 VI 可得析取詞的可換性. 因爲對 c) 作代入可得

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \text{ 與 } \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A},$$

因此，在每一個複合命題中，析取式 $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ 永可用 $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ 替換.

同樣，由公式(4)與(5)及規則 VI 可知，$\mathfrak{A}$ 與 $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ 可以彼此互相替換.

公式(7): $\overline{X \& Y} \to \bar{X} \vee \bar{Y}$.

證. $X \& Y$ 爲 $\overline{\bar{X}\bar{Y}}$ 的縮寫. 公式 $\overline{\overline{\bar{X}\bar{Y}}} \to \bar{X}\bar{Y}$ 可由 $\bar{\bar{X}} \to X$ 作代入而得.

又由 $X \to \bar{\bar{X}}$ 可得下列公式:

公式(8): $\bar{X} \vee \bar{Y} \to \overline{X \& Y}$.

公式(9): $\overline{X \vee Y} \to \bar{X} \& \bar{Y}$.

公式(10): $\bar{X} \& \bar{Y} \to \overline{X \vee Y}$.

證. 如果不用縮寫，公式(9)與(10)便是

$$\overline{X \vee Y} \to \overline{\bar{\bar{X}} \vee \bar{\bar{Y}}} \text{ 與 } \overline{\bar{\bar{X}} \vee \bar{\bar{Y}}} \to \overline{X \vee Y}.$$

它可如下法得到：在 $\overline{X \vee Y} \to \overline{X \vee Y}$ 中，依照規則 VI 把其右邊或左邊的 X 換爲 $\bar{\bar{X}}$，Y 換爲 $\bar{\bar{Y}}$.

公式(7)，(8)與公式(9)，(10)再加以規則 VI，便給出前面的規則 a3)（11 頁).

規則 VI 的另一個應用如下：由公理 a) 有 $X \vee X \to X$，又由公理 b) 作代入得 $X \to X \vee X$，因此 $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ 形表達式永遠可與 $\mathfrak{A}$ 彼此替換.

公式(11): $X \& Y \to Y \& X$.

證. $\overline{\bar{X}\bar{Y}} \to \overline{\bar{Y}\bar{X}}$ 可由 $\overline{\bar{X}\bar{Y}} \to \overline{\bar{X}\bar{Y}}$ 得到，只須應用析取聯結詞的可換性便成.

公式(12): $X \& Y \to X$.

證. $\bar{X} \to \bar{X}\bar{Y}$　[公理 b)],

$\overline{\bar{X}\bar{Y}} \to \bar{\bar{X}}$　[用公式(6)，譯者按，實卽相應於(6)的規則],

$X \& Y \to \bar{\bar{X}}$,

$X \& Y \to X$.

公式(13): $X \& Y \to Y$.

這可由(11)與(12)得證(譯者按，還要用到規則 V).

公式(14)： $X(YZ) \to Y(XZ)$.

證. $Z \to XZ$ [公理 b) 經過交換析取項],

$YZ \to Y(XZ)$ [用規則 IV],

$X(YZ) \to X(Y(XZ))$ [用規則 IV],

$X(YZ) \to (Y(XZ))X^*$ [用析取詞的可換性],

$X \to ZX$ [公理 b) 經過交換析取項],

$XZ \to Y(XZ)$ [前一公式中作代入],

$X \to Y(XZ)$ [因前一公式中 XZ 可換爲 ZX,再用規則 V],

$(Y(XZ))X \to (Y(XZ))(Y(XZ))$ [用規則 IV],

$(Y(XZ))X \to Y(XZ)^{**}$ [把 $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ 換爲 $\mathfrak{A}$].

由(*)與(**)再用規則 V 得

$$X(YZ) \to Y(XZ).$$

公式(15)： $X(YZ) \to (XY)Z$.

證. $X(YZ) \to X(ZY)$ [根據可換性作替換],

$X(ZY) \to Z(XY)$ [公式(14)],

$X(YZ) \to Z(XY)$ [用規則 V].

由此再用可換律卽得公式(15).

公式(16)： $(XY)Z \to X(YZ)$.

證. $Z(YX) \to (ZY)X$ [(15)中作代入].

應用可換律可把 $Z(YX)$ 換爲 $(XY)Z$,把 $(ZY)X$ 換爲 $X(YZ)$.

由公式(15)與(16)以及規則 VI 可得，不但析取項的次序，連析取項的結合方式也是無關重要的. 這樣我們又推出了析取聯結詞的結合定律.

公式(17)： $X \,\&\, (Y \,\&\, Z) \to (X \,\&\, Y) \,\&\, Z$,

$$(X \,\&\, Y) \,\&\, Z \to X \,\&\, (Y \,\&\, Z).$$

證. $X \,\&\, (Y \,\&\, Z)$ 爲 $\overline{\overline{X}\,\overline{\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}}}$ 的縮寫,而 $(X \,\&\, Y) \,\&\, Z$ 爲 $\overline{\overline{\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}}\,\overline{Z}}$ 的縮寫. 但依照我們前面的規則,這兩表達式是等價的,因此可以任意地彼此替換.

公式(18): $X \to (Y \to X \,\&\, Y)$.

證. $(\bar{X}\bar{Y})\overline{\bar{X}\bar{Y}}$ [(3)中作代入].

若對析取項作另一種結合,即得 $\bar{X}(\bar{Y}\overline{\bar{X}\bar{Y}})$,這便是所求的公式.

規則 VII. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ 可換爲 $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})$ 與 $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}$.

如果我們把縮寫→與 & 換以它們的意義的話，這便可由我們的規則直接得證.

規則 VIII. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ 可換爲 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

證. $\bar{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B})$ 可換爲 $(\bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{A}})\mathfrak{B}$ 或 $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$.

公式(19): $X(Y \,\&\, Z) \to XY \,\&\, XZ$.

證. $Y \,\&\, Z \to Y$ [公式(12)].

$X(Y \,\&\, Z) \to XY$ (甲)[用規則 IV].

同樣由公式(13)得

$X(Y \,\&\, Z) \to XZ$ (乙),

$XY \to (XZ \to XY \,\&\, XZ)$ [公式(18)],

$X(Y \,\&\, Z) \to (XZ \to XY \,\&\, XZ)$ [由(甲)及前式用規則 V],

$XZ \to (X(Y \,\&\, Z) \to XY \,\&\, XZ)$ [用規則 VII],

$X(Y \,\&\, Z) \to (X(Y \,\&\, Z) \to XY \,\&\, XZ)$ [由(乙)及前式用規則V],

$X(Y \,\&\, Z) \to XY \,\&\, XZ$ [用規則 VIII].

公式(20): $XY \,\&\, XZ \to X(Y \,\&\, Z)$.

證. $Y \to (Z \to Y \,\&\, Z)$ [公式(18)],

$(Z \to Y \,\&\, Z) \to (XZ \to X(Y \,\&\, Z))$ [公理 d)],

$Y \to (XZ \to X(Y \,\&\, Z))$ [用規則 V],

$XZ \to (Y \to X(Y \,\&\, Z))$ [用規則 VII],

$(Y \to X(Y \& Z)) \to [XY \to X(X(Y \& Z))]$ [公理 d) 中作代入],

$XZ \to [XY \to X(X(Y \,\&\, Z))]$ [用規則 V],

$X(X(Y \,\&\, Z))$ 可換爲 $(XX)(Y \,\&\, Z)$,又再換爲 $X(Y \,\&\, Z)$.

$$XZ \to (XY \to X(Y \,\&\, Z)).$$

由此用規則 VII 即得上述公式.

由公式(19)與(20)以及規則 VI 可推得分配律.

繼續的推演其它的公式與規則將是不必要的. 因爲現已證明,我們前面所建立的規則 a1) 至 a4), b1) 至 b3), 可由這公理系統作爲導出規則而得到[1]. 由此可得, 我們前面關於這些規則所作的注意,例如,關於對偶原則的,以及關於範式的,亦可以由這些公理而重新推得. 因此,要指出一公式的可證性,並不必每次都追溯到公理去. 因爲,一個命題公式能否從公理推出,全視在它所對應的合取範式中, 每一個析取式是否均含有彼此互相否定的兩項而定.

§12. 公理系統的不矛盾性

命題演算旣已公理地導出了, 我們就可以對命題演算提出一些爲公理方法所特有的問題及運用一些公理方法所特有的處理方式. 最重要的問題是:公理系統的不矛盾性、獨立性及完備性. 現在我們先處理公理的不矛盾性.

這裏,不矛盾性的問題可以在轉義上提出. 我們說某些公理是不矛盾的, 如果借助於演算並不能推出彼此互相否定的兩個複合命題, 卽是說, 它們是在兩命題 X 與 $\overline{X}$ 中對於 X 都作同樣的代入而得的.

對於這裏所作的不矛盾性的定義, 我們必須作如下的解釋. 似乎它把一個確定的邏輯原理,卽矛盾律,看得比其它的原理更特別一些. 但實際上却是,如果出現了一個形式上的矛盾,卽 $\mathfrak{A}$ 與 $\overline{\mathfrak{A}}$ 兩公式都可證明,那將把整個演算弄得毫無意義;因爲我們在上面已經注意到了, 如果 $\mathfrak{A}$ 與 $\overline{\mathfrak{A}}$ 形的兩個命題是可以證明的, 那末任意其它一個命題亦可以證明. 因此,關於演算不矛盾性的上述定

1) 按在這裏並未列有 $A\sim B$ 的定義, 又 §2 處的"A 等 B"與後來的"$A\sim B$"的關係如何,也未討論到,這兩點似應補充討論(事實上並不困難)——譯者註.

義便與下列定義相同:並不是每個公式都是可證的.

要證明演算的不矛盾性,我們如下進行.

我們把命題記號 $X, Y, Z, \cdots$ 當作算術的變元, 並當作只取值 $0,1$. 我們把 $X \vee Y$ 理解做算術積,而 $\overline{X}$ 則定義爲: $\overline{0}$ 等於 1 而 $\overline{1}$ 等於 0. 在這種解釋的基礎上, 每一個複合命題都是基本命題的一個算術函數,並且也只取 0 與 1 二值. 如果這個函數恆等於 0, 爲簡便起見,我們亦說這個符號表達式恆等於 0.

在這個理解之下, 我們可以對於從我們的公理推演出的所有公式給以一個共通的特性. 這特性是:根據所作的算術解釋,對變元的每一組可能的值,該公式均取值 0,即該公式是恆等於 0 的.

首先,這個性質是出現於公理 a)至 d)的,我們可以如下表明.

首先, 根據嘗試的結果, 可以確信: $\overline{X} \vee X$ 永取值 0. 由此可得, $\overline{X \vee X} \vee X$ [公理 a)] 亦等於 0,因爲 $X \vee X$ 永與 X 同值. ——其次,由於算術乘法的結合性, $\overline{X}(XY)$[公理 b)]永與 $(\overline{X} \vee X)Y$ 同值. 因此它永爲 0, 因爲 $0 \vee Y$ 永等於 0. 又因 $X \vee Y$ 永與 $Y \vee X$ 同值,故 $\overline{X \vee Y} \vee (Y \vee X)$ 爲 $\overline{X}X$ 的特例,因而恆等於 0. 故公式 c) 永取值 0. 最後公式 d) 亦然: 當 $Z = 0$ 時有一因子爲 0; 當 $Z = 1$ 時, $Z \vee X$ 與 X 同值, $Z \vee Y$ 與 Y 同值, 因此整個式子便與 $\overline{\overline{X}Y}\,\overline{X}Y$ 取得相同的值,而這又是 $\overline{X}X$ 的特例.

因此,這四條公理公式的確都有上述的特性. 若應用兩條用以推出新公式的規則,即代入規則與蘊涵規則後,這個特性仍不致於喪失. 因爲,就第一規則而言,顯然地,當把一個變元代入以一個表達式後,變元所取得的值域絕對不會因而擴大. 其次,如果我們根據第二規則由兩個公式 $\mathfrak{A}$ 與 $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ 而推出公式 $\mathfrak{B}$, 這個永取值 0 的性質也由原來兩公式 $\mathfrak{A}$ 與 $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ 而移到新推出的公式 $\mathfrak{B}$ 來; 因爲,既然公式 $\mathfrak{A}$ 永取值 0,故 $\overline{\mathfrak{A}}$ 永取值 1,因而 $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B}$ 同值, 因此 $\mathfrak{B}$ 便和 $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ 一樣永取值 0.

因此, 我們看見了,借助於我們的演算, 的確只得出具有下列

性質的公式，它在算術解釋之下永取值 0. 我們既確證了這點，我們的證明便可以結束了. 因爲顯然地，若對 X 與 $\overline{X}$ 中的 X 代入以同樣的複合命題時，所得的兩個公式不可能都具有永等於 0 的性質：事實上，當其中一個永取值 0 時，另一個必永取值 1.

§13. 系統的獨立性與完備性

我們已經能夠對本公理系統的不矛盾性問題作肯定的回答了. 與這問題有關的還有另一個問題：這些公理是否彼此獨立的？我們能否從這些公理中删去一兩個[1]？

回答是：這個公理系統的確滿足了獨立性的要求.

首先，我們指出，公式 a) $\overline{X\vee X}\vee X$ 是不能夠由其它公理推演出來的；並且即使加入公式 $\overline{X}\vee X$ 作爲公理後仍然是推不出的，因此，在這公理系統裏，公式 a) 不能夠換以更簡的公式 $\overline{X}X$. 同樣，對於其它的公理，其獨立性的證明亦是沿着加強的意義而進行的，即證明該公理不能夠換以公式 $\overline{X}\vee X$.

這個證明仍然借助於一個算術解釋而得. 作爲變元 X, Y, Z，…的值我們取剩餘類 0, 1, 2(mod 4). 記號 ∨ 仍表示通常的乘法，至於 $\overline{X}$ 則根據下列的約定而定義，$\overline{0}$ 指 1，$\overline{1}$ 指 0，$\overline{2}$ 指 2.

現在我們可以證實，在所給的關於變元（及聯結詞——譯者）的解釋之下，公式 $\overline{X}\vee X$，b)，c)，d) 永給出剩餘類 0，應用兩個規則後，這個性質亦轉移到所有由該 4 個公式所推出的公式去，這可以仿照上面不矛盾性的證明處所用的方法而看出. 現在，如果由公式 b)，c)，d) 及 $\overline{X}\vee X$ 借助於該兩規則可以推出公式 a)，則對於所有可能的 X 值來說，$\overline{XX}\vee X$ 都必須給出剩餘類 0. 但事實不然. 因爲如果 X 代以值 2，我們得

$$\overline{2\vee 2}\vee 2=\overline{0}\vee 2=1\vee 2=2,$$

1) 這公理系統的獨立性問題亦是由 27 頁所引的 P. Bernays 的著作而加以解決的.

而它非值 0.

公理 b) $\overline{X} \vee (X \vee Y)$ 對其餘公理(包括 $\overline{X} \vee X$ 在內)的獨立性可如下證明. 仍把 X, Y, Z 當作變元看待, 它們只能取值 0,1,2,3.但現在我們却如下而定義聯結詞 $\vee$:

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 0 \vee 2 = 0 \vee 3 = 0; \quad 1 \vee 1 = 1 \vee 2 = 1 \vee 3 = 1;$$

$$2 \vee 2 = 2; \quad 3 \vee 3 = 3; \quad 2 \vee 3 = 2,$$

並規定可換律應該成立. 其次, $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$ 分別指 1,0,3,2. 那末不管我們對於變元選取什麽值,公式 a), c), d) 及 $\overline{X} \vee X$ 永取值 0 或 2. 而這個性質對於所有借助於兩個規則而由 a), c), d) 及 $\overline{X} \vee X$ 所推出的一切公式都繼續成立. 但當我們令 $X=2$ 及 $Y=1$ 時, $\overline{X}(XY)$ 却取值 1.

相應地我們可以指出公理 c): $\overline{XY}(YX)$ 的獨立性. 我們定義 $\overline{0}$ 爲 1, $\overline{1}$ 爲 0, $\overline{2}$ 爲 0, $\overline{3}$ 爲 2. 其次令

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 0 \vee 2 = 0 \vee 3 = 1 \vee 0 = 2 \vee 0 = 3 \vee 0 = 0;$$

$$1 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 2 = 2 \vee 1 = 2; \quad 1 \vee 3 = 3 \vee 1 = 3;$$

$$2 \vee 3 = 0; \quad 3 \vee 2 = 3; \quad 2 \vee 2 = 2; \quad 3 \vee 3 = 3.$$

我們容易看出,當對任意的大寫拉丁字母代以數 0,1,2,3 時,公式 a), b), d) 及 $\overline{X} \vee X$ 均取值 0,而這個特性在推演公式的過程中繼續保持. 反之, 當我們代 X 以 2, 代 Y 以 3 時, c) 却取值 3. 這次獨立性的證明還告訴我們以更多的東西. 它指出,若不用公理 3),則結合律

$$\overline{X(YZ)}((XY)Z)$$

是不能證明的. 因爲當我們在這公式中代 X 以 3,代 Y 以 2 時便得

$$\overline{3 \vee (2 \vee 3)} \vee ((3 \vee 2) \vee 3) = \overline{0} \vee 3 = 1 \vee 3 = 3.$$

因此,同樣地,對公理 a), c), 與 d) 來說,結合律是獨立的.

餘下來還須證明公理 d) 對其餘公理的獨立性. 這可由下列的定義而得.

變元 X, Y, Z 的值可取值 0,1,2,3. 再令

$$\overline{0} = 1,\quad \overline{1} = 0,\quad \overline{2} = 3,\quad \overline{3} = 0,$$

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 0 \vee 2 = 2 \vee 0 = 0 \vee 3 = 3 \vee 0 = 2 \vee 3 = 3 \vee 2 = 0.$$

$$1 \vee 1 = 1,\quad 1 \vee 2 = 2 \vee 1 = 2,\quad 1 \vee 3 = 3 \vee 1 = 3.$$

$$2 \vee 2 = 2,\quad 3 \vee 3 = 3.$$

那末公式 a), b), c) 及 $\overline{X} \vee X$ 永取值 0,一切從它們推出的公式亦然. 反之,當我們取 $X = 3$, $Y = 1$, $Z = 2$ 時, d) 却取值 2.

因此,我們證明了公理 a) 至 d) 的獨立性[1]. 現在我們提出完備性問題. 一公理系統的完備性問題,可有兩個定義方式. 首先,我們可以說,由這公理系統可以得到在某一個由內容而刻劃的領域內為眞確的所有那些公式. 但是我們又可以把完備性的概念理解得嚴格一些,說一個公理系統是完備的,當且僅當把一個當時未能推出的公式加入到該系統的基本公式裏去時,永遠產生一個矛盾.

對目前的情況說,第一意義的完備性意指,由公理 a) 至 d) 可以推出一切永遠眞確的命題公式. 我們已經看見,它是滿足的.

但是它還有嚴格意義的完備性. 我們可以用下列方式證明. 設 $\mathfrak{A}$ 是由這些公理所不能證明的任意一個公式. $\mathfrak{B}$ 是相應於 $\mathfrak{A}$ 的具有合取範式的表達式. 因為 $\mathfrak{B}$ 正是和 $\mathfrak{A}$ 一樣的不能證明,所以在 $\mathfrak{B}$ 的合取項中必然出現一個析取式 $\mathfrak{C}$, 在其中沒有兩項是彼此否定的. 如果我們在 $\mathfrak{C}$ 中對於每個非否定的命題記號代以 X,對於每個否定的命題記號代以 $\overline{X}$,我們便得到下形的析取式 $X \vee X \vee X \vee \cdots \vee X$,而根據命題演算的規則,這是與 X 等值的. 現在如果把 $\mathfrak{A}$ 假定為眞公式,那便可推出 $\mathfrak{B}$ 因而也推出 $\mathfrak{C}$, 最後更得出 X 作為眞公式. 但 X 又可代以 $\overline{X}$,所以我們得到一個矛盾. 因此便證明了我們所考慮的公理系統是完備的.

---

1) 兩規則的獨立性尚未證明,按可仿第三章方法而證明之——譯者註.

第 二 章

類　　演　　算

（一元謂詞演算）

如果把各命題當作不可分的整體，那末對於精確地表示它們的邏輯關係來說，上述的邏輯演算已是足夠．但這絕不是說，對於整個邏輯的目的來說命題演算是足夠的．因爲甚至於極簡單的三段論式，在傳統邏輯中用口訣"barbara""celarent""darii"等表示的，它已不能夠表達了．例如，如果想把下列三句話所表達的邏輯關係

"所有人都是要死的，
嘉尤斯是人，
故嘉尤斯是要死的．"

來作一個形式的表達，他將是徒勞無功的．其原因在於：在這種推理中，命題並不是當作整體的，反之，命題的內部邏輯結構，所謂主語與謂詞的關係，在這裏起了主要的作用．由於這個考慮，我們須把演算加以改變或者至少把它的內容含意加以改變．

§1. 命題演算符號在內容上的新解釋

下面的演算中我們使用與命題演算相同的邏輯記號．但 X，Y，Z…等不再理解爲整個命題而理解爲謂詞．例如，X可爲謂詞"是要死的""是可除盡的"或者"有一個原因的"．這裏謂詞一字的用法，乃是哲學上的通常用法，理解爲：藉它可以刻劃一個主詞的．

本書下文，即第三章第四章處，却把謂詞一語用在更廣泛的意義上，詳情這裏暫不細說. 不過在那裏謂詞却可以有多個主語. 因此，我們把通常意義的謂詞，即本章所討論的謂詞，更準確些叫做一元謂詞. 但在下文，附加語"一元"二字經常省去.

如果 X 爲某一個謂詞，例如，"是美麗的"，則 $\bar{X}$ 指其反面謂詞"不是美麗的". 如果 X, Y 分別表示謂詞"無常的""有知識的"，則 $X \,\&\, Y$ 便是謂詞"無常的與有知識的"的符號，而 $X \vee Y$ 便是"無常的或有知識的"的符號. 其它邏輯記號我們仍然當作縮寫而使用.

就謂詞本身說，它旣不眞又不假. 因此，如果我們說一個公式 X 或 $X \vee Y$ 是永眞的，那就必須與以前所說的意義不同. 我們現在理解爲：這是指謂詞 X 或 $X \vee Y$ 對一切客體(Gegenstände)成立[1].

這樣，在一元謂詞演算中，所有記號都確定了意義. 一切公式都具有全稱判斷的意義. 爲了能夠把通常的全稱判斷，例如，"所有人都是要死的"加以表示，我們可首先把這個判斷寫成下形："一切客體或者不是人或者是要死的". 如果我們把"是人"表以記號 X，把"是要死的"表以記號 Y，這個判斷便有下列的符號表示：$\bar{X} \vee Y$ 永眞. 若用縮寫記號→，這個判斷亦可表爲 $X \to Y$ 永眞. 相應地，一個全稱否定判斷如"沒有人是十全的"可表示爲 $\bar{X} \vee \bar{Y}$ 永眞或 $X \to \bar{Y}$ 永眞，其中 X, Y 分別表示謂詞"是人"與"是十全的". 公式 $\bar{X} \vee \bar{Y}$ 永眞的準確解釋是：一切客體或者不是人或者不是十全的[2].

現在我們還可以提出永眞公式的問題，即什麽樣的公式，當把

---

1) 照下文的討論，"謂詞 X 對一切客體成立"這個命題應表示爲 $|X|$（X 爲謂詞，而 $|X|$ 爲命題）. 因此，這裏的約定無異說："X 永眞"這句話理解爲"$|X|$ 爲眞"或"$|X|$ 成立".

2) 本段內的"永眞"字樣是譯者加入的，原文中沒有，似不够妥當——譯者註.

其中的變元 $X, Y, \cdots$ 代入以隨意的謂詞後，能夠給出一個對於一切客體都成立的謂詞．容易看出，**在演算的新解釋下，永眞公式系恰巧和命題演算中的一樣．**

首先，第一章 §10 所給的基本公式現在仍然表示一個永眞公式．如上所述，作爲眞公式而言，$X \rightarrow Y$ 意指：凡是有性質 X 的所有客體都具有性質 Y．因此，立刻可以看出公式 a), b), c) 是永眞的；因爲我們有：凡是 $X \vee X$ 的亦是 X．凡是 Y 的亦是 $X \vee Y$．凡是 $X \vee Y$ 的亦是 $Y \vee X$．基本公式 d) 則可如下解釋：凡是 $\overline{X} \vee Y$ 的亦是 $\overline{Z \vee X} \vee (Z \vee Y)$．其眞確性可如下看出：凡是 Y 的亦是 $Z \vee Y$ 因而亦是 $\overline{Z \vee X} \vee (Z \vee Y)$．凡同時是 $\overline{X}$ 與 Z 的亦是 $Z \vee Y$ 因而亦是 $\overline{Z \vee X} \vee (Z \vee Y)$．凡同時是 $\overline{X}$ 與 $\overline{Z}$ 的亦是 $\overline{Z \vee X}$ 因而亦是 $\overline{Z \vee X} \vee (Z \vee Y)$．因爲这些基本公式對任意的謂詞均成立，故代入規則是可允許的．其次，由蘊涵規則所引出的只能是永眞公式；因爲，如果一切客體都有性質 $\mathfrak{A}$，並且凡是 $\mathfrak{A}$ 的亦是 $\mathfrak{B}$，那末一切客體必有性質 $\mathfrak{B}$．因此命題演算中的永眞公式亦是謂詞演算中的永眞公式．但是逆理亦眞．如果有一個公式它是謂詞演算中的永眞公式但非命題演算中的，我們便可以把它加到基本公式裏去，從而推出公式 X（參見第一章 §13 結論）．即可得一個結論，隨便一個謂詞對一切客體成立，而這顯然是不對的．

因爲謂詞演算中的永眞公式系與命題演算中的相同，所以在這裏，永眞公式的證實可借助於作出合取範式而得．

對此，可用一個例子釋明．試考慮下一命題：不活在水中的動物或是不吃魚的動物或者是不活在水中的吃魚者．試把謂詞"是動物""活在水中""是吃魚者"分別記爲 T，W，F．則上述判斷可符號地表示爲[1]

$$T \,\&\, \overline{W} \rightarrow (T \,\&\, \overline{F}) \vee (F \,\&\, \overline{W}) \text{ 永眞.}$$

1）下面幾行公式後面的"永眞"字樣亦譯者所加——譯者註．

現在想表明這個判斷的純邏輯性質,即指出它的永眞性是與 T,W,F 的實際含意無關的. 若把縮寫→換以它的意義,我們得

$$\overline{T \& \overline{W}} \vee (T \& \overline{F}) \vee (F \& \overline{W}) \text{ 永眞.}$$

根據第一章 §3 中的 a3) 與 a2) 有

$$(\overline{T} \vee W) \vee (T \& \overline{F}) \vee (F \& \overline{W}) \text{ 永眞.}$$

根據 a1) 有

$$\overline{T}WTF \& \overline{T}WT\overline{W} \& \overline{T}W\overline{F}F \& \overline{T}W\overline{F}\overline{W} \text{ 永眞.}$$

由最後一式可以看出這個判斷是永眞的. 因爲每一個合取項都至少含有一個謂詞及其否定.

命題演算的公式除却它原有的意義以及謂詞演算的解釋以外,還有第三種解釋. 但與謂詞演算不同,這裏並不是又引入一種新的邏輯關係而只是把在謂詞演算中所能表達的事實給以另一種表示,而具有更明顯的優點.

如果兩謂詞對於恰恰同樣的客體同時成立或不成立, 我們便說這兩謂詞是等價的. 如果兩謂詞等價,它們的否定也等價. 如果對 $\mathfrak{A}$ 或 $\mathfrak{B}$ 用等價的謂詞替換,則 $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ 亦變成等價的謂詞. 又兩個等價的謂詞對一切客體都同時成立或不成立. 因此,謂詞演算中所表達的邏輯關係,並不是指謂詞的內涵或它的語言形式,而是指它的外延,即指使得它成立的那些客體所組成的區域. 因此,就我們的目的來說,可以把等價的謂詞,即具有相同外延的謂詞看做相等的. 這可如下得到:我們把每一個謂詞對應於一個確定的客體"類",在該類中包括了所有使該謂詞成立的客體,又凡含有相同客體的類我們當作是相等的. (在數學中通常不用"類"字而用"集"字.)不含有任何客體的類,我們叫做空類;含有一切客體的類,叫做全類. 現在,類將是演算的對象,因此叫做"類演算". 用類演算的公式所表達的邏輯關係,恰巧和謂詞演算所表示的一樣;因爲謂詞演算中的公式的眞確性,原來也只與對應於謂詞的類有關.

由一切不屬於類 X 的客體所組成的類，記爲 $\bar{X}$，我們把它叫做 X 的補類．$X \& Y$ 包含一切既屬於 X 又屬於 Y 的客體；$X \& Y$ 叫做 X 與 Y 的交類．$X \vee Y$，即 X 與 Y 的併類，包含一切至少屬於兩類之一的客體．$X \rightarrow Y$ 與 $X \sim Y$ 仍如前，理解爲 $\bar{X} \vee Y$ 與 $\bar{X} \vee Y \& \bar{Y} \vee X$ 的縮寫．若說一公式 $\mathfrak{A}$ 是永眞的，那便意指 $\mathfrak{A}$ 是包含一切客體的類．在這樣規定之下，謂詞演算的一切規則對於類演算仍然成立不變．在這解釋之下，$X \rightarrow Y$ 的永眞性意指，X 所對應的類爲 Y 所確定的類的子類；公式 $X \sim Y$ 爲永眞，當且僅當兩類 X 與 Y 全等．

在類演算中，全稱判斷"所有人都是要死的"可如下表述：

"由非人類以及要死類這兩者所組成的併類包含了所有的客體"．

形式上的表示則和謂詞演算中的一樣．

§2. 類演算與命題演算的聯合

我們還不能把傳統邏輯內所有的推理都在謂詞演算中加以形式化，因爲我們還缺少對於特稱判斷的表示法．這個表示法只有聯合命題演算與謂詞演算或類演算才能得到．我們是由於下列的考慮而想到這個聯合的：謂詞演算中的關係便是一個命題，因而便可受命題演算的規則所支配．從這個思想便導致建立一個聯合演算，其中邏輯記號 &，∨，$\bar{\ }$ 等部分地用作命題的聯結詞，部分地用作謂詞的聯結詞．

首先，這（譯者按，即聯結詞的兩面性）便引起了疑問，到底命題 $\bar{X}$ 意指謂詞 X 對任何客體不成立（這時，$\bar{\ }$ 爲謂詞的聯結詞——譯者），抑指並非 X 對一切客體成立（這時，$\bar{\ }$ 爲命題的聯結詞——譯者）．例如，設 X 表示謂詞"是美麗的"，那末照第一個意義，$\bar{X}$ 便讀爲：一切客體都不美麗，而照第二個意義則是：並非一切客體都美麗．我們可用下法避免這個困難，即把謂詞用兩根豎綫

限起來[1]: 因此,$|X \vee Y|$意指,謂詞 $X \vee Y$ 對一切客體成立,反之,$|X| \vee |Y|$ 意指:謂詞 X 對一切客體成立或謂詞 Y 對一切客體成立. 剛才引起混淆的兩命題現在可用$|\bar{X}|$與$\overline{|X|}$相區別. 借助於聯合演算,現在便可以表示特稱命題了. 例如命題"有些數是奇數"可如下變形,"並非一切數都是偶數". ——若把謂詞"是數"表爲 X,謂詞"是偶數"表爲 Y,則可先把命題"一切數是偶數"符號地表爲$|\bar{X} \vee Y|$. 這命題的反面因此便由$\overline{|\bar{X} \vee Y|}$而表示. 一般地,$\overline{|\bar{X} \vee Y|}$表示命題:"有些客體同時是 X 與 $\bar{Y}$.

我們試考慮下列例子,它表明了,某一命題的眞確性可根據純粹邏輯的理由而得出:如果所有人都是要死的而且所有人都是溫血的,那末便沒有人是不死的或者不是溫血的". 試以 M,S,W 表示謂詞"是人""是要死的""是溫血的",那末採用縮寫→後,這句話便有一個表示式:

$$|M \rightarrow S| \ \& \ |M \rightarrow W| \rightarrow |M \rightarrow \overline{\overline{W} \vee \overline{S}}|.$$

另一個例子是所謂浩伯定理(Haubersche Theorem). 它說,如果把一類 A 分爲類 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,同時又分爲不相交的類 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$,此外,每一類 X_i 含於 Y_i 之內,則反之,每一 Y_i 亦含於 X_i 之內.

如果沒有客體同時屬於 A, B 兩類,即如果沒有 A 是 B,我們便說兩類 A 與 B 是不相交的. 依前,這事實可用$|\bar{A} \vee \bar{B}|$表示. 爲簡單起見,我們令 $n = 3$,這時浩伯定理的符號表示式便是

$$|A \sim X_1 \vee X_2 \vee X_3| \& |A \sim Y_1 \vee Y_2 \vee Y_3| \& |\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_2| \& |\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_3| \& |\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_3| \ \&$$
$$\& |X_1 \rightarrow Y_1| \& |X_2 \rightarrow Y_2| \& |X_3 \rightarrow Y_3| \rightarrow |Y_1 \rightarrow X_1| \& |Y_2 \rightarrow X_2| \& |Y_3 \rightarrow X_3|.$$

現在我們要證明這命題及上命題的純粹邏輯性. 依此,當作

1) 本句不够明顯,應該說:"我們以拉丁字母如 X 等表謂詞,而以 $|X|$ 表示:X對一切客體都成立". 因此 X 表謂詞而 $|X|$ 表命題. 前一節的約定是:如果豎綫在一公式的首尾處,則該豎綫可以省去. 本節的討論則是:豎綫不在一公式的首尾時則不能省(事實上,從本節起,所有豎綫均不省了).

聯合演算的最重要問題，我們有下列的任務，即找出一個形式的審定法，用以決定哪一個公式是表示永眞的命題，即把其中出現的謂詞記號或類記號給以任意的意義後，它均爲眞的．對於與類演算有關的所謂客體區域，除了要求它至少含有一個元素外，我們並不作其它的假設．

要解決這個任務，首先我們可把每一公式都經過等價變形而變成一定的範式．這時，每個公式都由一些用兩根豎綫限起來的命題借助於命題聯結詞而構成．由這一些命題所組成的複合命題可展開而得命題演算中的合取範式．要使得這個合取範式對於一切謂詞均表示一個眞命題，必要而且充分的是：每個合取項均具有這種性質．因此，我們便把上面的問題歸結到下面的問題：一個形如

$$\overline{|\mathfrak{B}_1|} \vee \overline{|\mathfrak{B}_2|} \vee \cdots \vee \overline{|\mathfrak{B}_m|} \vee |\mathfrak{C}_1| \vee |\mathfrak{C}_2| \vee \cdots \vee |\mathfrak{C}_n|$$

的析取式在什麽情形下是永眞的？回答是：這樣的析取式

$$\overline{|\mathfrak{B}_1|} \vee \cdots \vee \overline{|\mathfrak{B}_m|} \vee |\mathfrak{C}_1| \vee \cdots \vee |\mathfrak{C}_n|$$

爲永眞，當且僅當在下列命題

$$|\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \cdots \vee \overline{\mathfrak{B}}_m \vee \mathfrak{C}_1|, \cdots, |\mathfrak{B}_1 \vee \cdots \vee \overline{\mathfrak{B}}_m \vee \mathfrak{C}_n|$$

中至少有一個是永眞時（m = 0 或 n = 0 的情形也包括在內）．至於後面这些命題在什麽時候是永眞的，這已經在本章 §1 處解決了；其判定可用下法得到：在兩根豎綫之內作出合取範式．

爲了證明這點，我們先考慮以下情形：$|\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \cdots \vee \overline{\mathfrak{B}}_m \vee \mathfrak{C}_i|$ 爲眞時．這時可把這公式寫成 $|\mathfrak{B}_1 \& \cdots \& \mathfrak{B}_m \rightarrow \mathfrak{C}_i|$ 之形．顯然它意指：類 $\mathfrak{B}_1 \& \cdots \& \mathfrak{B}_m$ 包含在類 $\mathfrak{C}_i$ 之內．因此先得 $|\mathfrak{B}_1 \& \cdots \& \mathfrak{B}_m| \rightarrow |\mathfrak{C}_i|$．由於等價式

$$|\mathfrak{B}_1 \& \cdots \& \mathfrak{B}_m| \sim |\mathfrak{B}_1| \& \cdots \& |\mathfrak{B}_m|,$$

（如果一系列的類的交類爲全類，那末每個類也是全類，逆理亦眞．）我們又得

$$|\mathfrak{B}_1| \& \cdots \& |\mathfrak{B}_m| \rightarrow |\mathfrak{C}_i|$$

或

$$\overline{|\mathfrak{B}_1|} \vee \cdots \vee \overline{|\mathfrak{B}_m|} \vee |\mathfrak{C}_i|,$$

因而便有

$$\overline{|\mathfrak{B}_1|} \vee \cdots \vee \overline{|\mathfrak{B}_m|} \vee |\mathfrak{C}_1| \vee \cdots \vee |\mathfrak{C}_n|.$$

對於 $n = 0$ 的情形，我們可以把一個空類當作 $\mathfrak{C}_i$ 而加入，因而得到相應的結果；這時重要的是：空類不可能是全類，即個體域至少要含有一個元素． 對於 $m = 0$ 的情形，以上斷言的眞確性立刻可見．

現在我們再考慮以下情形，即下列命題中

$$|\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \cdots \vee \overline{\mathfrak{B}}_m \vee \mathfrak{C}_1|, \cdots, |\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \cdots \vee \overline{\mathfrak{B}}_m \vee \mathfrak{C}_n|,$$

沒有一個命題是永眞的． 設 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是在这些公式中出現的基本類． 這時我們可以找出一個客體域與一個相應於 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的分類，使得諸類 $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_m$ 都是全類，反之，諸類 $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_n$ 沒有一個是全類，因而析取式

$$\overline{|\mathfrak{B}_1|} \vee \cdots \vee \overline{|\mathfrak{B}_m|} \vee |\mathfrak{C}_1| \vee \cdots \vee |\mathfrak{C}_n|$$

便是假的了．

要證明它，我們把每一個公式 $\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \cdots \vee \overline{\mathfrak{B}}_m \vee \mathfrak{C}_i$ 變成合取範式 $\mathfrak{K}_i$． 根據假設，公式 $|\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \cdots \vee \overline{\mathfrak{B}}_m \vee \mathfrak{C}_i|$ 中沒有一個是永眞的，故在每一個合取式 $\mathfrak{K}_i$ 中，至少含有一個合取項 $X_{r_1} \vee \cdots \vee X_{r_p} \vee \overline{X}_{s_1} \vee \cdots \vee \overline{X}_{s_q}$，其中 $r_1, \cdots, r_p, s_1, \cdots, s_q$ 都是彼此不同的． 對於每一個這樣的項我們都作出一數 $2^{s_1} + \cdots + 2^{s_q}$ 與它對應． 如果該合取項缺少 $\overline{X}_{s_1}, \cdots, \overline{X}_{s_q}$，我們便使它對應於 2^0． 因此，既然每一個 $\mathfrak{K}_i$ 中都至少含有具這樣性質的項，故至少對應於一數，今把所有这些對應的數組成一集 M_i，並令 M 表 $M_1, \cdots, M_n$ 的併集． 再令 $\mathfrak{G}_l$ $(l = 1, \cdots, k)$ 表示 M 中具有下列性質的數的集，即把它記爲二進數時有一項 2^l 出現的． ——今把 M 當作客體域而類 $\mathfrak{G}_l$ 當作 X_l． 假設這時，$\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_m$ 變成 $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_m$；而 $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_n$ 變成 $\mathfrak{E}_1, \cdots, \mathfrak{E}_n$． 設 $m = 2^{s_1} + \cdots + 2^{s_q}$ 爲 M_i 中任意一數，它是與 $\mathfrak{K}_i$ 中一項 $X_{r_1} \vee \cdots \vee$

$X_{r_p} \vee \bar{X}_{s_1} \vee \cdots \vee \bar{X}_{s_q}$ 相對應的，那末這數便屬於 $\mathfrak{G}_{s_1}, \cdots, \mathfrak{G}_{s_q}$；但却不屬於 $\mathfrak{G}_{r_1}, \cdots, \mathfrak{G}_{r_p}$，因此亦不屬於 $\mathfrak{G}_{r_1} \vee \cdots \vee \mathfrak{G}_{r_p} \vee \mathfrak{G}_{s_1} \vee \cdots \vee \mathfrak{G}_{s_q}$. 數 2^0 不屬於 $\mathfrak{G}_1, \cdots, \mathfrak{G}_k$ 中任一個，故亦不屬於 $\mathfrak{G}_{r_1} \vee \cdots \vee \mathfrak{G}_{r_p}$. 因此 M_i 中任何一數都不屬於 $\bar{\mathfrak{D}}_1 \vee \cdots \vee \bar{\mathfrak{D}}_m \vee \mathfrak{E}_i$，故亦不屬於諸類 $\bar{\mathfrak{D}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{D}}_m, \mathfrak{E}_i$ 中任何一個. 故 $\mathfrak{E}_i$ 不是全類，其次，M_i 中沒有一個元素是屬於類 $\bar{\mathfrak{D}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{D}}_m$ 的，因而 M_i 的每個元素，亦即 M 的每個元素都屬於 $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_m$. 總結起來，$\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_m$ 中每一個都是全類；而 $\mathfrak{E}_1, \cdots, \mathfrak{E}_n$ 却沒有一個是全類的.

爲了解釋明白起見，我們用這個審定法以證實上述的浩伯定理。這定理的符號敍述是：

$$|A \sim X_1X_2X_3| \& |A \sim Y_1Y_2Y_3| \& |\bar{Y}_1\bar{Y}_2| \& |\bar{Y}_1\bar{Y}_3| \& |\bar{Y}_2\bar{Y}_3| \& |X_1 \rightarrow Y_1| \& \\ \& |X_2 \rightarrow Y_2| \& |X_3 \rightarrow Y_3| \rightarrow |Y_1 \rightarrow X_1| \& |Y_2 \rightarrow X_2| \& |Y_3 \rightarrow X_3|.$$

若計及等價式 $|X| \& |Y| \sim |X \& Y|$，並記 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 只是 $\bar{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$ 的縮寫，則由上述審定法便可得出下列結果：這定理之爲永眞，當且僅當

$$|(A \sim X_1X_2X_3) \& (A \sim Y_1Y_2Y_3) \& \bar{Y}_1\bar{Y}_2 \& \bar{Y}_1\bar{Y}_3 \& \bar{Y}_2\bar{Y}_3 \& (X_1 \rightarrow Y_1) \& \\ \& (X_2 \rightarrow Y_2) \& (X_3 \rightarrow Y_3) \rightarrow (Y_1 \rightarrow X_1) \& (Y_2 \rightarrow X_2) \& (Y_3 \rightarrow X_3)|$$

爲永眞時. 我們以前已經提到，在聯合演算中一公式 $|\mathfrak{A}|$ 之爲永眞，當且僅當把 $\mathfrak{A}$ 當作命題演算公式時它爲永眞. 後者可通過展爲合取範式而判定. 但其眞確性亦可如下看出，把其中出現的類記號盡一切可能的組合而代以空類或全類時，它必須給出眞值，正如在命題演算中的永眞命題那樣，當對其中的命題變元盡一切可能的組合而代以假命題與眞命題時，也必得眞值. 現在這個命題只在以下情形之下才可能是假的，即所有在最外面的記號→之前的合取項都爲全類，而至少在其後有一個合取項爲空類. 例如，試設 $Y_1 \rightarrow X_1$ 爲空類. 因爲我們現在只是處理全類與空類，所以這只能是 Y_1 爲全類而 X_1 爲空類. 又因 $\bar{Y}_1 \vee \bar{Y}_2$, $\bar{Y}_1 \vee \bar{Y}_3$ 爲全類，故 Y_2 與 Y_3 必爲空類. 又因 $X_2 \rightarrow Y_2$ 與 $X_3 \rightarrow Y_3$ 爲全類，故 X_2 與 X_3 爲空類，因此 $X_1X_2X_3$ 爲空類而 $Y_1Y_2Y_3$ 爲全類. 但這樣一來，$A \sim$

$X_1X_2X_3$ 與 $A\sim Y_1Y_2Y_3$ 兩者便不可能同時爲全類（因而引起矛盾——譯者）. 由於公式結構的對稱性，若設 $Y_2\rightarrow X_2$ 或設 $Y_3\rightarrow X_3$ 爲空類，結果亦同，因此，定理的眞確性便得以證明.

§ 3. 傳統的亞里士多德推理式的系統地推演

在這一節我們想更深入地討論傳統的推理論，這主要的是具有歷史上的興趣. 現在要處理的是如何地把亞里士多德的推理格式放入我們的聯合演算中，並且如何地從這個演算的觀點來把它系統化及建立基礎.

所要考慮的推理具有下列的刻劃性質：它含有三個句子，其中第三句(結論句)是前兩句(前提)的邏輯推論. 這三句中每一個都有下列四個形式之一：

"所有 A 是 B"(全稱肯定判斷).

"有些 A 是 B"(特稱肯定判斷).

"沒有 A 是 B"(全稱否定判斷).

"有些 A 非 B"(特稱否定判斷).

作爲這四種形式的縮寫記號我們常用元音 a,i,e,o (依照相應的次序). 至於這四個判斷的一般記號我們可用符號 AB.

在這三個句子中一共出現三個概念，主詞(S)，謂詞(P)及中詞(M)；而且結論句作 SP 形，而在前提中，第一個前提含有概念 M 與 P，第二個前提含有 M 與 S. 因此，我們得到下列四個推理"格式"[1]：

$$\frac{\begin{matrix}MP\\SM\end{matrix}}{SP}\qquad\frac{\begin{matrix}PM\\SM\end{matrix}}{SP}\qquad\frac{\begin{matrix}MP\\MS\end{matrix}}{SP}\qquad\frac{\begin{matrix}PM\\MS\end{matrix}}{SP}$$

1) 注意在結論句中我們限定其次序爲 SP，這並沒有喪失一般性，因爲每一個以 PS 爲結論句的推理格式永遠可以通過改變記號及互換前提而變到上列的四格式之一去.

因爲格式有四種，每種格式之中，每個句子又因它所屬的判斷形式可爲 a, i, e, o 而有四個可能，因此，當純粹作組合地處理時，一共有 256 種推理方式的可能． 但是，由於結論句必須由前提推出這個要求，可能的個數便大大地減少． 亞里士多德邏輯說，共有 19 個不同的推理方式． 對於这些方式人們曾引入三音節的口訣，口訣中的元音依次地給出該推理式的三個句子所屬的判斷形式． 利用這種辦法，我們得到下列的鳥瞰：

第 1 格式	第 2 格式	第 3 格式	第 4 格式
barbara	cesare	datisi	calemes
celarent	camestres	feriso	fresison
darii	festino	disamis	dimatis
ferio	baroco	bocardo	bamalip
		darapti	fesapo
		felapton	

我們想用謂詞演算來檢查，到底这些推理式是否包含了全部在考慮中的推理形式，又其中所列的推理方式到底是否滿足邏輯有效性的要求． 爲此，我們首先要把一判斷 AB 的四個形式 a, i, e, o 作符號的表示． 設以 X, Y 分別表示謂詞"是 A""是 B"，那末這四個判斷形式便可以符號地表示爲：

$$|\bar{X} \vee Y|;\ |\overline{\bar{X} \vee \bar{Y}}|;\ |\bar{X} \vee \bar{Y}|;\ |\overline{\bar{X} \vee Y}|.$$

由這種寫法直接可以得到關於所考慮的判斷形式的傳統規則：反對規則（Opposition）和換位規則． 因爲，在這四個判斷中，最後一個與第一個相反對；第二個與第三個相反對． 其次，中間這兩個公式對 X 與 Y 是對稱的，因此可知判斷"有些 A 是 B"與"有些 B 是 A"同意，而判斷"沒有 A 是 B"則與"沒有 B 是 A"同意． 反之，形式 a 與 o 是不可能換位的．

現在我們把這四個判斷形式的表示方式應用到推理式去，並把謂詞"是 S""是 M""是 P"記爲 X, Y, Z． 這樣每一個推理式都由

三個公式組成．第一前提將由下列四形式之一

$$|\bar{Y} \vee Z|;\ |\bar{Y} \vee \bar{Z}|;\ |\bar{Z} \vee Y|;\ |\bar{Z} \vee \bar{Y}|$$

或其邏輯的否定而表示．第二前提則相應地為下列四形式之一

$$|\bar{Y} \vee X|;\ |\bar{Y} \vee \bar{X}|;\ |\bar{X} \vee Y|;\ |\bar{X} \vee \bar{Y}|$$

或其否定．對於結論句則我們有下列二形式之一或其否定

$$|\bar{X} \vee \bar{Z}|;\ |\bar{X} \vee Z|.$$

（注意，非否定的 X，Y 與 Z 只能在聯結詞的後件處出現．）

在形式條件方面還有一個要求：即第三公式須為前兩公式的推論，其意為，當在 X，Y，Z 處代入確定的謂詞時，除非第三公式亦眞，前兩公式不能並眞．

現在需要探究，如何通過这些要求而把各公式的可能配合有所限制．

在討論時，下列的注意是有用的：我們可把通過 $\vee$ 所聯結的兩項彼此互換而不致改變一公式的眞假性． 其次，前提的次序是無關重要的，又由於這種推理的一般性，一謂詞到底以 U 或 $\bar{U}$ 表示，那是沒有關係的． 基於这些事實，我們可把每一對前提歸結到下列六個範式之一：

Ⅰ． $|\bar{U} \vee \bar{V}|$，$|\bar{V} \vee \bar{W}|$

Ⅱ． $|\bar{U} \vee \bar{V}|$，$|V \vee \bar{W}|$

Ⅲ． $\overline{|\bar{U} \vee \bar{V}|}$，$|\bar{V} \vee \bar{W}|$

Ⅳ． $\overline{|\bar{U} \vee \bar{V}|}$，$|V \vee \bar{W}|$

Ⅴ． $\overline{|\bar{U} \vee \bar{V}|}$，$\overline{|\bar{V} \vee W|}$

Ⅵ． $\overline{|\bar{U} \vee \bar{V}|}$，$\overline{|V \vee W|}$

結論句則為下列形式之一

$$|\bar{U} \vee \bar{W}|;\ |\bar{U} \vee W|;\ |U \vee \bar{W}|;\ |U \vee W|$$

（或其否定）． 在這新寫法中，如果把 V 代以 Y 或 $\bar{Y}$，又把 U，W 或者把 W，U 代以下列四對之一：X,Z；$X,\bar{Z}$；$\bar{X},Z$；$\bar{X},\bar{Z}$，然後把析取項作一切可能的互換，我們便回到從前的寫法，並得到所有被允許的（就形式上言）三公式系之一（前提須取適當的次序）．

現在我們試把六對前提 Ⅰ—Ⅵ，逐一檢查，看由它們得到什麼

推論，首先我們可以看見，由 I,IV,V 得不到我們所希望的推論.

因爲，只要謂詞 V 對任何客體都不成立，前提 I 便被完全任意的 U, W 所滿足；只要 V 對一切客體都成立而 U 至少對某一個客體成立，前提 IV 便被滿足；只要 W 對某一客體成立，V 對一切客體成立，那末前提 V 亦被滿足.

又由前提 VI 亦得不到我們所討論的那種結論句. 因爲，爲了要使得在適當地選擇 V 以後，前提 VI 能被滿足，只要 U 與 W 都各被一個客體滿足便成. 但是這個條件與上面討論的結論句(共八個——譯者)的每一個都虛假這事並不衝突.

因此在我們的推理式中，只有情形 II 與 III 可加以考慮. 如果利用永眞公式 $|X \,\&\, \bar{Y}| \,\&\, |Y \vee Z| \rightarrow |X \vee Z|$，那末由 II 的兩個前提 $|\bar{U} \vee \bar{V}|$ 與 $|V \vee \bar{W}|$，立刻可推出關係 $|\bar{U} \vee \bar{W}|$. 又 $|\bar{U} \vee \bar{W}|$ 亦是由該兩前提所能作出的最強的結論，因爲，既然這個關係是成立的，我們便可以使兩個前提都被滿足，只要取 V 等於 W 便成.

在 III 中，第一前提 $\overline{|\bar{U} \vee \bar{V}|}$ 意指，有一客體(卽至少有一客體)同時滿足 U 與 V. 第二前提 $|\bar{V} \vee \bar{W}|$ 意指，每一客體，只要具有性質 V 的亦具有性質 $\bar{W}$. 因此可得，有些客體同時滿足 U 與 $\bar{W}$，卽 $\overline{|\bar{U} \vee W|}$ 是一個眞公式.

反之，如果公式 $\overline{|\bar{U} W|}$ 爲眞，則當我們令 $\bar{V}$ 等於 W 時，可知前提 III 亦眞.

由此可得，所有在我們考慮之中的推理式全可歸結爲兩個主要形式，卽

$$
\text{(A)}\quad \begin{array}{c} |\bar{U} \vee \bar{V}| \\ |V \vee \bar{W}| \\ \hline |\bar{U} \vee \bar{W}| \end{array}
\qquad\qquad
\text{(B)}\quad \begin{array}{c} \overline{|\bar{U} \vee \bar{V}|} \\ |\bar{V} \vee \bar{W}| \\ \hline \overline{|\bar{U} \vee W|} \end{array}
$$

現在要處理的是：由這兩個主要形式，借助於被允許的各種變形而變回以前的表示式去，這樣，我們才可以分出各種亞里士多德推理式. 因此，我們必須顧及推理式的形式方面的限制，由於这

些限制，非否定謂詞 X, Y, Z 只能在析取式的第二項處出現，而 Y 絕不能出現於結論句. 其次，又須注意，在主要形式(A)中，U 與 W 的互換並沒有給出新的推理式.

準此，通過下列的代入我們得到由主要形式 (A) 而來的一切推理式:

$$U = X, \quad V = Y, \quad W = Z;$$
$$U = X, \quad V = \bar{Y}, \quad W = Z;$$
$$U = X, \quad V = \bar{Y}, \quad W = \bar{Z}.$$

這裏(適當地選取前提次序以及析取項次序)由第一個代入可得出推理式 camestres 與 calemes；第二個代入得 celarent 與 cesare；第三個代入得 barbara.

對於主要形式(B)，，我們可由下列的代入而得各種推理式:

$$U = X, V = Y, W = Z; \quad U = X, V = Y, W = \bar{Z};$$
$$U = X, V = \bar{Y}, W = Z; \quad U = Z, V = Y, W = \bar{X};$$
$$U = \bar{Z}, V = Y, W = \bar{X}.$$

第一個代入給出推理式 ferio, festino, feriso, fresison；第二個代入給出 darii, datisi；第三個代入給出 baroco；第四個代入給出 disamis, dimatis；第五個代入給出 bocardo.

所作的討論證明了，在所要求的推理式中它給出了 15 個不同的形式. 这些都屬於亞里士多德的推理式，因此古典的推理形式全體窮盡了一切可能情形. 但是在我們的討論中，並沒有得出所有亞里士多德的推理式. 寧可是，在我們所得的全體中少了四個推理方式: darapti, bamalip, felapton, fesapo. 這個差異在於: 從亞里士多德起，已經變成了古典的對於全稱肯定命題 ("一切 A 爲 B") 的解釋與我們對公式 $|\bar{X} \vee Y|$ 的解釋並不完全一致. 事實上，依照亞里士多德，必須有客體使 A 成立時，命題"一切 A 爲 B"才算眞確. 在這點上我們所以要與亞里士多德有所不同，乃由於顧到邏輯在數學上的應用之故，在這裏(在數學上——譯者)，把亞里士多

德的解釋作爲基本是不適當的.

如果我們想把缺少的四個推理式在我們的演算中推出，那末我們必須把在亞里士多德邏輯中暗中作出的而在我們看來不是自明的那個假設明白寫出. 例如，推理式 darapti 相當於下列的模式:

$$\begin{array}{c} |\bar{A} \vee B| \\ |\bar{A} \vee C| \\ \overline{|\bar{A}|} \\ \hline |\bar{B} \vee \bar{C}| \end{array}$$

這推理式是對的,因爲根據 §2 處的審定法,下面公式

$$|\bar{A} \vee B| \ \& \ |\bar{A} \vee C| \ \& \ \overline{|\bar{A}|} \rightarrow |\bar{B} \vee \bar{C}|$$

已確定爲永眞的. 其它三推理式仿此. 因此照我們的解釋,darapti, felapton, fesapo, bamalip 乃是複雜的推理式.

第 三 章

狹 義 謂 詞 演 算

§1. 以前的演算的不充分性

較之顧及內容的傳統邏輯說來，聯合演算可以對邏輯問題作更有系統的處理．但在另一方面，我們可以說，就邏輯推理的可能性來說，兩者基本上是相等的，在聯合演算中的復雜推理，也可以通過多次的亞里士多德的推理格式而得到．

依照以前邏輯家的意見，連康德(Kant)也在內，認為亞里士多德的推理已經基本上把邏輯窮盡了．康德說：[1]

"對它(邏輯)值得注意的是，(從亞里士多德起)直到現在，還不能有任何一步的進展，因此從各方面說，它都似乎是封閉的和完備的"．

事實上，亞里士多德的形式體系對於十分簡單的邏輯關係來說已經證明是不足夠的了．尤其是當處理數學的邏輯基礎問題時，它根本是不夠的．因為，凡是需要把多個客體間的關係作符號的表示時，它總是失靈的．

我們想用一個簡單例子來說明．試考慮一命題："如果 B 介於 A 與 C 之間，則 B 亦介於 C 與 A 之間"．在通常的命題演算中，當然我們可以把它寫成下形 $X \to Y$，在一元謂詞演算中，當然亦可同樣表示，但更可表達如下："如果一個有序三點組有以下性質，第二

1) 見"純粹理性批判"二版序言．

點介於第一點與第三點之間,則它亦有以下性質,第二點介於第三點與第一點之間". 但這種表示式完全不能表達出這個斷言的邏輯本性,即關係"介於"對於 A 與 C 言有對稱性. 因此這個表示式完全不能用以推出原命題所能推出的數學推論. 即使我們用聯合演算中的表示方式,情況亦不能有任何改善.

爲了說明目前的事態,我們還可以引進另外一個不屬於數學範圍內的例子. 我們有一些邏輯上自明的斷言:"如果有一個兒子,那便有一個父親". 一個能使我們滿意的邏輯演算應該把這個斷言的自明性表明出來,即借助於符號表示式而把所斷言的關係由簡單的邏輯原理當作推論而推出來. 但我們以前的演算對此無能爲力. 我們當然可以(應用聯合演算後)把所討論的斷言符號地表成以下形式:$\overline{X}\rightarrow\overline{Y}$,其中 X, Y 分別地表示謂詞"是兒子""是父親". 但是這個公式絲毫不能幫助我們來辨別這個斷言的眞確性,因爲當對 X 與 Y 作其它的代入時,它可以表示假命題. 在這個公式裏,並沒有表示出由前提到結論之間的邏輯關係所根據的那一點,即謂詞"是兒子"與謂詞"是父親"都含有由一個客體到另一個客體的某一個關係(按指父子關係——譯者). 在所有更複雜的判斷裏,幾乎都有類似的情況.

§2. 謂詞演算在方法論上的基本思想

既然已經確定我們以前的演算是不足夠的,我們必需找尋新樣式的邏輯符號. 爲此,我們要重新回到我們開始離開命題演算時我們所考慮的地方. 這時,决定的步驟是把一命題分解成主語與謂詞. 但我們那時並未充分利用這種分解,我們表示一命題時雖明顯地記出其謂詞,但並未表出其主語. 所以要對符號作這個限制,原因在於:我們力求在形式體系方面與命題演算有所聯係. 如果我們把這個傾向於命題演算的觀點除去,那便很自然地要採用下面的程序,即在表示命題時,把客體(個體)與談論及它的

性質(謂詞)加以區別,並且把兩者同樣明確地表出來.

因此,我們採用以下方式,即在符號地表示謂詞時我們使用帶有空位的函詞符號,其空位是給代入客體符號而用的. 例如,可用函詞符號 $P(\ )$ 表示謂詞"是一個質數". 那末 $P(5)$ 便是以下命題的表示式:"5 是一個質數". 如果 $M(\ )$ 是謂詞"是人"的記號,那末 M(嘉尤斯)便意指"嘉尤斯是人". 又設由小到大的關係用有兩個空位的函詞符號 $<(\,,\,)$ 表示,那末 $<(2,3)$ 便是下命題的符號表示式:"2 小於 3". 同樣,命題"B 介於 A 與 C 之間"可表為 $Z(A,B,C)$.

一切數學公式都表示兩個或多個數量的關係. 例如,公式 $x+y=z$ 對應於一個三項謂詞 $S(x,y,z)$. $S(x,y,z)$ 的真確性便說,x,y,z 符合關係 $x+y=z$[1].

對這種用新方式表示的命題仍可使用命題演算中的聯結詞. 例如,命題 $P(5)$ 的否定表為 $\overline{P(5)}$. 公式

$$(<(2,3)\ \&\ <(3,7))\rightarrow<(2,7)$$

表示以下命題:"如果 2 小於 3, 3 小於 7,則 2 小於 7".

我們還缺少一個關於命題的普遍有效性的符號表示. 要得到它,我們依照數學的先例,除了確定的客體的記號(專名)外,還引入變元 $x,y,z,\cdots$,它們亦可用來填入函詞記號的空位處. 當一個空位填入確定的記號時,我們把它叫做相應的變元的值.

一般說來,一變元的值限於客體的一個確定的種類,隨函詞記號的意義而確定. 例如,設把初等平面幾何的基本關係"點 x 在直綫 y 上"記為有兩個變元的函詞記號,$L(x,y)$. 這裏只有點可作為 x 的值,只有直綫可作為 y 的值.

如果我們在邏輯函詞的空位處代入一個確定的變元值(即,個

---

1) 照以前邏輯的慣例,只是具有一個空位的函詞才叫做謂詞,多個空位的函詞卻叫做關係. 這裏我們對謂詞一字用它的極為廣泛的意義.

體的專名),我們便得到一個確定的命題,它可眞可假. 反之,如果在函詞符號的空位處代入變元,它並沒有表示一個確定的判斷,我們只得到一個符號表達式,它與相應的變元有關. 在代數中,當我們寫出文字公式時,其意爲,如果在變元的地方代入隨便一個數值,相應的數字等式必是眞的,同樣,在邏輯演算中我們亦同法處理. 公式

$$(<(x,y) \,\&\, <(y,z)) \rightarrow <(x,z)$$

意指,對於隨便一個三數組 x,y,z 只要關係式 $<(x,y)$ 與 $<(y,z)$ 成立,則 $<(x,z)$ 亦成立.

這樣,我們立卽得到全稱判斷的一個表示式. 但爲了使得這個全稱性可與否定詞乃至其它邏輯聯結詞 &, ∨ ,→ 互相聯合使用起見,我們需要一個特殊的"全稱號". 否則,我們不能知道,$\overline{P(x)}$ 到底指"對於一切 $x,\overline{P(x)}$ 成立",抑指"並非對於一切 $x,P(x)$ 都成立". 對於全稱判斷的表示可用下面方式得到,把該邏輯函詞的相應變元放在括號內而置於函詞記號之前.

因此 $(x)A(x)$ 意指: 對於一切 $x,A(x)$ 成立. 上面所給的兩個容易混淆的判斷可通過 $(x)\overline{P(x)}$ 與 $\overline{(x)P(x)}$ 而區別. 爲對稱起見,對於特稱判斷,我們引入一個特別的"存在號",卽 $(Ex)A(x)$ 表示下面判斷:"有一個 x 使 $A(x)$ 成立".

全稱號與存在號有一個共名:量詞.

相應於一個全稱號或存在號的變元,我們叫做"約束變元". 它所起的作用正和數學中的積分變元一樣:特別地,這種變元的名稱是無關重要的. 爲與約束變元區別起見,其它的變元叫做"自由變元".

關於寫法方面我們要注意,在全稱號或存在號之後的公式,如果它含有記號 &, ∨ ,→ 之一,並且沒有否定橫綫來蓋過它,則須放在括號之中. 又爲醒目起見,我們作下列的規定:

$\overline{A(x)}$ 簡寫爲 $\overline{A}(x)$,

$\overline{(x)A(x)}$ 簡寫爲 $\overline{(x)}A(x)$,

$\overline{(Ex)A(x)}$ 簡寫爲 $\overline{(Ex)}A(x)$.

由全稱號與存在號的意義,我們得下列的等值式:

$$(Ex)A(x) \text{ 等 } \overline{(x)}\overline{A}(x),$$
$$(Ex)\overline{A}(x) \text{ 等 } \overline{(x)}A(x),$$
$$\overline{(Ex)}A(x) \text{ 等 } (x)\overline{A}(x),$$
$$\overline{(Ex)}\overline{A}(x) \text{ 等 } (x)A(x).$$

基於這些內容上的關係,我們可把存在號與全稱號彼此代替. 因此就謂詞演算的符號言,有三個卽夠. 否定記號是必不可少的,其次是三符號 &, ∨, → 之一,其次是二記號 (x), (Ex) 之一.

上面我們只是考慮單獨出現的全稱號及存在號. 如果我們顧到,全稱號與存在號可以聯合出現,我們便得到一個全新的邏輯形象. 卽使我們只考慮一項謂詞 (卽一元謂詞), 這種聯合已經是可能的了;但對多項謂詞說,它却起了特別的作用. 例如,對二項謂詞 $A(x,y)$ 言,我們有下列極簡單形式的聯合:

$$(x)(y)A(x,y)$$

"對一切 x 與一切 y 言,關係 $A(x,y)$ 成立";

$$(Ex)(Ey)A(x,y)$$

"有一 x 與有一 y,使 $A(x,y)$ 成立";

$$(x)(Ey)A(x,y)$$

"對一切 x 都有一 y,使 $A(x,y)$ 成立";

$$(Ex)(y)A(x,y)$$

"有一 x 使對一切 y 言,關係 $A(x,y)$ 成立".

爲了把這個聯合的意義弄得清楚起見, 我們可以每次都加入一個括號,例如寫爲

$$(x)[(y)A(x,y)]$$

及

$$(x)[(Ey)A(x,y)].$$

但卽使沒有這種括號，亦不致於產生混亂，所以我們慣常把括號省去．——如果我們使用三個乃至多個量詞，相應地我們便將有更大量的全稱號與存在號的聯合．

由全稱號的意義可得，在表達式 $(x)(y)A(x,y)$ 中，兩全稱號的位置可彼此互換而不致變更命題的含意．在下面命題

$$(Ex)(Ey)A(x,y)$$

中的兩個存在號亦然．反之，在 $(x)(Ey)A(x,y)$ 中，記號 (x)，(Ey) 的次序是主要的．

例如，表達式

$$(x)(Ey)<(x,y)$$

（如果變元 x,y 以實數集作爲定義域）表示一個眞命題，"對於每個 x，都有一 y 使 x 小於 y"，卽"對每一個數都有一個更大的數"．

但是，如果我們把 (x)，(Ey) 的位置對調，便得 $(Ey)(x)<(x,y)$，而這是一個假命題的表達式，卽"有一數 y，它大於所有的 x"．因此，(x) 與 (Ey) 的對調，得到完全不同的命題．

其間的邏輯關係是，根據（以後推出的）公式

$$(Ey)(x)A(x,y)\rightarrow(x)(Ey)A(x,y)$$

可知，由形如 $(Ey)(x)A(x,y)$ 的眞命題可推出 $(x)(Ey)A(x,y)$ 爲眞，反之則不然．

§3. 關於謂詞演算的應用的初步提示

在我們對各規則給出系統的表示以前（這些規則對於演算的處理是必要的），我們將先處理一些例子，以使我們對於符號更爲熟悉．

首先我們指出，表達自然數列的基本性質的那些公理，如何地可以在謂詞演算中作出符號的表達．這些公理是：

1．對於每一數都有一個亦只有一個繼數．

2．沒有一個數使 1 直接繼其後．

3．對於每一個異於 1 的數，都有一個亦只有一個直接先行者．

在這些命題中，作爲個別謂詞的是直接彼此相繼的關係以及兩數間的差異性關係．差異性關係不但出現於表達式“異於 1”中，而且暗中出現於表達式“只有一個”中．因爲“只有一”數具有某某性質，意指不可能有兩個相異的這樣的數．相異性是算術相等性的否定．

因此我們引入謂詞

$$=(x,y) \quad (\text{“}x\text{ 等於 }y\text{”})$$

與

$$F(x,y) \quad (\text{“}y\text{ 直接繼 }x\text{”}),$$

且用這些關係可把所述的公理表示如下：

1．$(x)(Ey)\{F(x,y) \,\&\, (z)(F(x,z)\rightarrow =(y,z))\}$,

卽“對於每個 x，都有一個 y，它直接繼 x 之後，並且每一個直接繼 x 之後的 z 都和 y 相等”．

2．$\overline{(Ex)}F(x,1)$,

卽“沒有 x 使 1 直接繼它之後”．

3．$(x)\{\overline{=(x,1)}\rightarrow(Ey)[F(y,x) \,\&\, (z)(F(z,x)\rightarrow=(y,z))]\}$,

卽“對於每一個異於 1 的 x，都有一個 y，使 x 直接繼它之後，並且每一個使 x 直接繼它之後的 z 都和 y 相等”．

我們還想把謂詞演算中的證明方法用一些簡單例子加以提示．先討論下列命題，上面我們已經指出，這命題不能在第二章的演算內加以證明，由於這點曾因而使我們弄清楚，第二章的演算是不足夠的．這命題是：“如果有一個兒子，就有一個父親”．

首先，這句斷言在謂詞演算中的符號表達式是：

$$(Ex)S(x)\rightarrow(Ex)V(x)$$

其中 $S(x)$ 表示“x 爲一兒子”，$V(x)$ 表示“x 爲一父親”．這命題只有當我們把其中出現的謂詞概念加以分析以後，才可能證明．兒

子這個概念一方面含有"男性的"謂詞，另一方面含有孩子對雙親的關係；而父親這個概念則含有對妻子與對孩子的關係.

因此，如果我們把"x是男性的"記爲 $M(x)$，並把謂詞"x 與 y 爲 z 的雙親"(或更準確些，"x 與 y 作爲丈夫與妻子有孩子 z") 表以符號 $K(x,y,z)$，那末 $S(x)$ 可定義爲

$$M(x) \& (Eu)(Ev)K(u,v,x)$$

("x 是一兒子"指："x 是男性的，並且有一 u 及有一 v，使 u 作爲丈夫而 v 作爲妻子這二個成爲 x 的雙親").

同樣，$V(x)$ 可定義爲

$$(Ey)(Ez)K(x,y,z)$$

("x 是一父親"指："有一 y 有一 z 使 x 作爲丈夫而 y 作爲妻子這二個成爲 z 的雙親").

今把所得的對於 $S(x)$ 與 $V(x)$ 的表達式代入，則所考慮的斷言便得下面形式：

$$(Ex)[M(x)\&(Eu)(Ev)K(u,v,x)]\rightarrow(Ex)(Ey)(Ez)K(x,y,z).$$

這個公式表示兩命題之間的推論關係，而我們所找尋的證明則在於指出，從這兩命題的第一個出發，通過一系列的推論關係，每個關係都是根據演算而作的，最後可達到第二個命題[1]. 這時我們要應用在命題演算中常用的而在謂詞演算中當然亦成立的原理，卽由兩個已證命題 $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{C}$ 永遠可以得出 $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{C}$.

首先，相應於命題演算中的公式 $X \& Y\rightarrow Y$ 的，在謂詞演算中，我們有以下關係式：對任意的 F 與 G，

$$(Ex)(F(x) \& G(x))\rightarrow(Ex)G(x).$$

表達式 $(Eu)(Ev)K(u,v,x)$ 本爲關於 x 的謂詞，今縮寫爲 $N(x)$，

1) 這半段解釋頗有問題，第一，這公式只表示蘊涵關係，未必便是推論關係；第二，由命題 $\mathfrak{A}$ 通過一系列的推論關係而達到 $\mathfrak{B}$，未必便可斷定 $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ (本書並未討論所謂推論定理). 不過，下面的證明却是正確的，只是這半段的註釋有毛病罷了　譯者註.

我們得[1)]

$$S(x) \sim M(x) \,\&\, N(x),$$

上述推理式給出

$$(Ex)S(x) \rightarrow (Ex)N(x),$$

或者換回 $N(x)$ 的表達式:

$$(Ex)S(x) \rightarrow (Ex)(Eu)(Ev)K(u,v,x).$$

現在,在演算中有一條一般的定理:彼此不間斷地相繼的存在號可以互換其位置. 對於兩個存在號的情況,我們在上面已經引述過了,把它應用多次,卽得這條一般定理. 今試顚倒其次序,上述最後一公式便成

$$(Ex)S(x) \rightarrow (Eu)(Ev)(Ex)K(u,v,x).$$

這便是我們的斷言,所不同的,不過是在→以後的變元另外命名吧了.

另一例是下列一命題:

"如果有一個結果,便有一個原因".

首先把這斷言表成下式

$$(Ex)W(x) \rightarrow (Ex)U(x),$$

$W(x)$ 意指;"x 是一結果",$U(x)$ 指:"x 是一原因". 今再把謂詞 U 與 W 通過下面所引入的二項謂詞而分析之,該二項謂詞爲"x 產生 y",記爲 $K(x,y)$. 我們得到 $U(x)$ 與 $W(x)$ 的定義式[2)]

$$U(x) \sim (Ey)K(x,y)$$

與

$$W(x) \sim (Ey)K(y,x).$$

把這些關係式代入,我們的斷言便成下面形式

$$(Ex)(Ey)K(y,x) \rightarrow (Ex)(Ey)K(x,y)$$

1) 原文作"$S(x)$ 等 $M(x) \& N(x)$", 按從 "$\mathfrak{A}$ 等 $\mathfrak{B}$" 及 "$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$" 是否可得 "$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$",本書未有證明,故今改正——譯者註.

2) 原文把"~"寫爲"等"—— 譯者註.

或者把變元部分地改名得

$$(Ey)(Ex)K(x,y)\rightarrow(Ex)(Ey)K(x,y).$$

這公式是存在號可換性定理的直接推論.

上面引入的 $(Ex)(y)A(x,y)$ 與 $(y)(Ex)A(x,y)$ 的差異性亦可由一致收斂與通常收斂的例來解釋. 試考慮一確定的單值算術函數(譯者按, 指函數值爲實數的)序列 $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, (爲簡單起見, 我們假定)它們對於一切實值 x 均有定義. 下面命題: 對於 x 的每一值這函數序列都收斂於 0, 可用我們的符號表述如下:

$$(x)(z)\{<(0,z)\rightarrow(Ey)(n)[<(y,n)\rightarrow<(|f_n(x)|,z)]\}.$$

("對於隨意的 x,對每個大於 0 的 z,都有一 y 使得對於一切大於 y 的 n,不等式 $|f_n(x)|<z$ 都滿足"). 其中變元 y 與 n 以整數爲客體域. 而 x,z 則以實數爲客體域.

下列斷言,該函數序列對於一切 x 均一致收斂於 0, 則有符號表達式爲:

$$(z)\{<(0,z)\rightarrow(Ey)(x)(n)[<(y,n)\rightarrow<(|f_n(x)|,z)]\}$$

("對於每個大於 0 的 z,都有一個 y,使得對於一切 x 與一切大於 y 的 n,不等式 $|f_n(x)|<z$ 都成立").

兩個斷言的差異點在於: 它們的表達式中, 全稱號 (x) 處在不同的地位.

§4. 謂詞演算中記號的精確化

作爲對謂詞演算系統地處理的準備, 我們先對所用的記號作一個精確的綜結.

在謂詞演算中出現的記號首先是各種各類變元的記號. 對於變元所使用的記號,永遠是大寫或小寫拉丁字母. 我們作下面的區別:

1. 命題變元: $X,Y,Z,\cdots$

2．客體變元(個體變元)：$x, y, z, \cdots$

3．謂詞變元：$F(.), G(.,.), H(.,.,.), \cdots$

這裏，對謂詞變元言，即使大寫拉丁字母一樣，如果其空位個數不同，亦須作爲不同的變元看待的.

現在我們想說明，所謂謂詞演算的公式到底理解作什麽.

暫時我們可以說，所謂一個公式是指用有意義的方式由所說的變元符號借助於聯結詞 &, ∨, $\overline{}$, →, ∼ 與全稱號存在號而構成的一個表達式．但爲了要保持下節所建立的公理觀點，即在證明的推演中，不借助於邏輯記號的意義而只根據形式規則而推導，這裏我們便要求，對於號稱爲公式的那些表達式只能通過描述它的形式結構而刻劃，所謂"有意義的"這類概念應該避免.

對於公式的外貌，我們可以預先說出一點，即其中可以出現客體變元，即小寫拉丁字母，及相應的全稱號與存在號．設在一公式中，除了客體變元，例如 x，以外，同時還出現有相應的全稱號或存在號，在目前這便是 (x) 或 (Ex)，那末我們便說這變元在這公式中是約束的，否則便叫做自由的.

我們今把公式理解作我們演算中的一些記號組合，而它們是經過且只經過有限次應用下列的規則而組成的：

1．一個命題變元是一公式.

2．一個謂詞變元，其空位處已以客體變元填入了的，是一公式.

3．如果某一記號組合 $\mathfrak{A}$ 是一公式，則 $\overline{\mathfrak{A}}$ 亦然.

4．如果 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 爲任意兩公式，而同一的客體變元絕不在其中之一內爲約束的，而在另一公式內爲自由的，則 $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ 亦是公式.

5．如果 $\mathfrak{A}(x)$ 爲一公式，其中變元 x 作爲自由變元而出現，則 $(x)\mathfrak{A}(x)$ 與 $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ 亦是公式．相應地，對其它的自由變元亦準此.

我們明白地指出，根據上面的定義，在同一公式中同一的變元不能同時以自由形式及約束形式而出現[1]。

爲了節省括號，我們還作出下列的約定：對於表達式的分離力，記號$\rightarrow$，$\vee$，&，$\sim$將比全稱號與存在號爲強．例如，$(x)F(x)\&A$爲$((x)F(x))\&A$的簡寫．以前的約定（即&結合力強於$\rightarrow$，$\sim$；而$\vee$的又強於&）依然有效．在每一公式中出現的每一個全稱號與存在號，都對應於該公式中一個確定的與它有關的部分，這部分我們將叫做該符號的作用區域．因此，在公式

$$(x)(F(x)\rightarrow(Ey)G(y))$$

中，記號(x)的作用區域一直延展到公式之末．反之，在

$$(x)F(x)\rightarrow(Ey)G(y)$$

中，(x)的作用區域只在$\rightarrow$記號之前．通過下列規則，我們還可把括號再行減少：如果全稱號與存在號彼此直接相繼，沒有括號加以隔開，則我們理解爲：它們的作用區域延展到相同的地方．例如

$$(x)(Ey)(z)(H(x,y,z)\&K(y,z))\&L(u)$$

乃下式的簡寫

$$(x)\{(Ey)[(z)(H(x,y,z)\&K(y,z))]\}\&L(u).$$

爲了避免錯誤起見，我們還對大寫德文字母的用法再加以解釋，這我們本已在前面（1章§5）就命題演算而簡單地說明過了．這些字母並非我們的形式語言中的記號，原則上根本可以省去．它的用處在於：對演算作內容的傳達時，能夠寫成簡短的形式．我們用$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$，$\mathfrak{C}$以傳達某些公式，其準確的樣式尚未確定．例如，$\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$表示隨便一個蘊涵式，例如$(A\rightarrow B)\rightarrow(B\rightarrow C)$或$(x)F(x)\rightarrow\rightarrow(x)G(x)$．我們以$\mathfrak{A}(x)$表示隨便一個含有自由變元$x$的公式．同樣，以$\mathfrak{A}(x,y)$表示出現有自由變元$x,y$的公式等等．

1）這完全由於條件4）中的限制而來．如果把這限制除去，則下文的改名規則δ）可以推出，無須作爲基本規則——譯者註．

§5. 謂詞演算的公理

現在我們要仿命題演算那樣，對謂詞演算建立一個公理系統，使得謂詞演算中其餘的眞確的命題能夠從它們依照一定的規則而得(譯者按，這些規則須在公理系統之內).

公理與推理規則的建立，當然須與公式的內容上的解釋相一致. 但旣採用公理觀點，則由公理至"眞"公式的推演，却只能純粹形式地得到，卽我們對於公式所表達的命題的含意毫不關心，而只注意由規則所得的步驟. 只有當我們對形式運算的結果加以解釋時，我們才須顧到我們的演算內記號的意義.

內容意義可如下得到. 我們設想把一個個體域作爲基礎，客體變元及全稱號存在號均對它而言. 這個領域可不作確定，但須預先假定它至少含有一個個體. 謂詞演算中一個公式叫做永眞的，或叫做**普遍有效的**，當且僅當，不管我們對於個體域作怎樣的選擇，每當我們把該公式中的命題變元代入以一個確定的命題；把自由客體變元代入以該體域的一個確定客體；把謂詞變元代入以在該體域中有定義的謂詞時；該公式永遠變成一個眞命題. 謂詞演算中的普遍有效公式我們亦叫做**永眞公式**.

今給出相應的公理系統. 首先，當作邏輯基本公式我們有命題演算的公理. 爲簡單起見，我們給出同以前一樣的形式.

a) $X \vee X \rightarrow X$.

b) $X \rightarrow X \vee Y$.

c) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$.

d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$.

(如前，$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 理解爲 $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$ 的一個縮寫).

現在再引入第二章的兩個公理，關於"一切"和"有些"的二個公理.

e) $(x)F(x) \rightarrow F(y)$.

f) $F(y) \rightarrow (Ex)F(x)$.

第一個公理說："如果一謂詞 F 對一切 x 成立，則它對任意一個 y 亦成立".

第二個公理說，"如果一謂詞 F 對某一個 y 成立，則有一個 x 使 F 成立".

爲了使得可以由邏輯基本公式以及已經推出的公式而得到新公式，我們有下列的規則.

α) 代入規則

$\alpha 1$) 在一個公式中，我們可把一命題變元代入以隨便一個公式，只須假定，在該命題變元出現的各處都同樣代入，並須其結果仍繼續得出一個公式（在前節所給的定義下）. 此外，這代入只在以下情形才被允許，卽用以代入的公式不以原來公式的約束變元作爲客體變元.

$\alpha 2$) 一個自由客體變元可代入以另一客體變元，只須假定，在該客體變元出現的各處都同樣代入. 用以代入的變元不允許在原來公式中任何地方以約束形式而出現.

$\alpha 3$) 一個 n 項謂詞變元在一定的情況下可代入以至少有 n 個自由客體變元的公式. 設想在公式 $\mathfrak{A}$ 中的 n 項謂詞變元 F 處作代入. 用以代入 F 的那個公式內必出現有客體變元，我們隨意取出 n 個並依照任意方式排列之，並命名爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 依此，這個用以代入 F 處的公式可記爲 $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 只有在下列情形下我們才允許作代入，卽在 $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中可能出現的其它自由變元不得在公式 $\mathfrak{A}$ 中作爲約束變元而出現，其次，在 $\mathfrak{A}$ 中 F 的空位處所填的變元値與 $\mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_n)$ 中的約束變元不得相同，並且代入的結果必須仍是一個公式. 代入的手續可照下列方式進行：謂詞 F 在 $\mathfrak{A}$ 中某一個特殊出現處其變元空位必被某些客體變元所塡充，設（暫時的）記爲 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n$. 這些 $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ 無須彼此不同，其中有些可以是相同的變元. 這時便在 $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n)$ 的相

應位置處代入以 $\mathfrak{B}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，即代入以下公式，由把 $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的變元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 處處都分別地代入以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 而得. 相應的代入須在 F 的每一次出現處都實行[1].

β）蘊涵規則

由形爲 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 的兩公式可得一新公式 $\mathfrak{B}$.

γ）關於"一切"與"有些"的模式(規則)

γ1）如果我們已推出一公式 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$，其中在記號→後面的部分含有自由變元 x，而在 $\mathfrak{A}$ 中變元 x 却不出現，這時我們可得一新推出公式 $\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)$.

γ2）如果對於 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}(x)$ 我們有同樣的條件，則由 $\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$ 可得一新公式 $(Ex)\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$[2].

δ）約束變元的改名規則

我們可把一公式中所出現的約束變元改爲另一個約束變元. 這個改名須在作用區域內各處以及在全稱號內或存在號內實行. 還要假定，改名的結果仍然是一公式. 如果想改名的變元出現多次，即如果有多個作用區域，則這個改名可只就一個作用區域而實行.

§6. 永眞公式系統

我們試看，借助於上面所給的邏輯基本公式及推理規則，如何可把謂詞演算中所有的普遍有效公式，亦即永眞公式都構造出來.

這些公式的一個部分系統，即其中只含命題變元的，我們已經知道了. 關於這個部分系統，我們在上面已經推出了公式 (1) 至

1) 例如設 $\mathfrak{A}$ 爲 $F(x,y) \& X \rightarrow F(u,x)$ 而 $\mathfrak{B}$ 爲 $G(x_1) \vee H(x_2, s) \rightarrow H(t, x_2)$ 則容許代入的條件是：x, y, u 不是 $\mathfrak{B}$ 內的約束變元，而 s, t 不是 $\mathfrak{A}$ 內的約束變元，又代入結果必須仍是一公式. 這三條件都滿足後，即可代入而結果爲：

$$[G(x) \vee H(y,s) \rightarrow H(t,y)] \& X \rightarrow [G(u) \vee H(x,s) \rightarrow H(t,x)]$$ ——譯者註.

2) 這裏所用的關於"一切"與"有些"的公理系統，即表爲公式 e), f) 及規則 γ) 的，是由 P. Bernays 所作出.

(20)以及規則 I 至 VIII 了．這個部分系統我們叫做命題演算的永眞公式系統．

首先，我們將用種種例子說明推演新公式所使用的方法．其次，正如以前在命題演算處一樣，我們亦用到新推理規則．以前所推出的命題演算中的導出公式及導出規則在這裏都要用到．

規則 γ'：　如果我們證明了一個含有自由變元的公式 $\mathfrak{A}(x)$，那末 $(x)\mathfrak{A}(x)$ 亦是可以證明的．

證．由 $\mathfrak{A}(x)$ 用規則 II 與 III 得

$\overline{X \vee \overline{X}} \vee \mathfrak{A}(x)$，

$\overline{X \vee \overline{X}} \vee (x)\mathfrak{A}(x)$　[用規則 γ)]，

$X \vee \overline{X}$　[公式(3)]，

$(x)\mathfrak{A}(x)$　[用蘊涵規則]．

規則 δ'：　我們可把一公式中出現的自由變元與約束變元全都改爲其它的變元，只要注意，凡是當初由相同變元所佔的地位在改名後仍由相同的變元佔着，原來出現不同的變元的，改名後仍是不同的變元．

其證明可由多次運用規則 $\alpha 2$) 與 δ) 而得．例如，由基本公式 e) 出發，經過下法而得到 $(y)F(y) \rightarrow F(x)$：

$(x)F(x) \rightarrow F(y)$，

$(x)F(x) \rightarrow F(z)$　[用規則 $\alpha 2$)]，

$(y)F(y) \rightarrow F(z)$　[用規則 δ)]，

$(y)F(y) \rightarrow F(x)$　[用規則 $\alpha 2$)]．

由規則 δ' 可得，如果在規則 γ) 的表述中不用 x 而用 y 或其它的變元，規則 γ) 仍然有效．

公式(21)：　$(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))$．

證．$X \vee \overline{X}$　[公式(3)]，

$F(x) \vee \overline{F}(x)$　[用代入法]，

$(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))$　[用規則 γ']．

公式(22): $(x)F(x)\to(Ex)F(x)$.

證. $(x)F(x)\to F(y)$ [公理 e)],

$F(y)\to(Ex)F(x)$ [公理 f)],

$(x)F(x)\to(Ex)F(x)$ [用規則 V].

公式(23): $(x)(A\vee F(x))\to A\vee(x)F(x)$.

證. $(y)(A\vee F(y))\to A\vee F(x)$ [公理 e)作代入再用規則 δ'],

$(y)(A\vee F(y))\to\bar{\bar{A}}\vee F(x)$ [把 A 替換爲 $\bar{\bar{A}}$],

若用縮寫→,則可寫爲

$(y)(A\vee F(y))\to(\bar{A}\to F(x))$,

$[(y)(A\vee F(y))\ \&\ \bar{A}]\to F(x)$ [用規則 VII],

$[(y)(A\vee F(y))\ \&\ \bar{A}]\to(x)F(x)$ [用規則 γ],

借助於規則 VII 與規則 δ 可把這表達式變爲

$$(x)(A\vee F(x))\to A\vee(x)F(x).$$

公式(24): $(x)(A\to F(x))\to(A\to(x)F(x))$.

證. 前面公式中把 A 代以 $\bar{A}$ 卽得本公式.

規則 IX. 如果 $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}(x))$ 可證,則 $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to(x)\mathfrak{C}(x))$ 亦然,其中 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 不含有變元 x.

這是規則 γ1) 的推廣. 這裏的 2 個前提亦可設爲任意有限多個前提,其證明與本情形完全一樣.

證. $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}(x))$,

$\mathfrak{A}\to(x)(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}(x))$ [用規則 γ)],

由此和(24)用規則 V 卽得所求的公式.

公式(25): $A\to(x)(A\vee F(x))$.

證. $A\to A\vee B$ [公理 (b)],

$A\to A\vee F(x)$ [用代入法],

$A\to(x)(A\vee F(x))$ [用規則 γ)].

公式(26): $(x)(A\vee F(x))\sim A\vee(x)F(x)$.

證. 因爲已經證明了(23),所以只須證明以下逆定理便夠了:

$A\vee(x)F(x)\rightarrow(x)(A\vee F(x))$(譯者按，由"$A\rightarrow B, B\rightarrow A$"可得"$A\sim B$"，這點本書沒有證明．但要補證不難，讀者可自爲之)．

$(y)F(y)\rightarrow F(x)$　[由 e) 用規則 δ']，

$A\vee(y)F(y)\rightarrow A\vee F(x)$　[用規則 IV]，

$A\vee(x)F(x)\rightarrow(x)(A\vee F(x))$　[用規則 γ) 與 δ)]．

公式(27)：　$(x)(A\rightarrow F(x))\sim(A\rightarrow(x)F(x))$．

證．這公式可由(26)得出，正和(24)之由(23)得出一樣．

公式(28)：　$(x)(A\,\&\,F(x))\sim A\,\&\,(x)F(x)$．

證．我們先證：

I．$(x)(A\,\&\,F(x))\rightarrow A\,\&\,(x)F(x)$．

$(y)(A\,\&\,F(y))\rightarrow A\,\&\,F(x)$，　(甲)

$A\,\&\,F(x)\rightarrow F(x)$　[公式(13)]，

$(y)(A\,\&\,F(y))\rightarrow F(x)$　[用規則 V]，

$(x)(A\,\&\,F(x))\rightarrow(x)F(x)$　[用規則 γ) 及 δ)]，　(乙)

$A\,\&\,F(x)\rightarrow A$，

$(x)(A\,\&\,F(x))\rightarrow A$　[用(甲)，規則 V 與 δ)]．　(丙)

利用命題演算中的公式

$$(X\rightarrow Y)\rightarrow((X\rightarrow Z)\rightarrow(X\rightarrow Y\,\&\,Z))$$

及兩次使用蘊涵規則，我們可由最後一公式(丙)及公式(乙)得出公式 I．

II．$A\,\&\,(x)F(x)\rightarrow(x)(A\,\&\,F(x))$．

$(y)F(y)\rightarrow F(x)$；

根據命題演算由此得

$A\,\&\,(y)F(y)\rightarrow A\,\&F(x)$，

$A\,\&\,(x)F(x)\rightarrow(x)(A\,\&\,F(x))$．　[用規則 γ) 及 δ)]．

由公式 I 及 II 卽得所欲證的公式．

公式(29)：　$(x)(y)F(x,y)\sim(y)(x)F(x,y)$．

證．$(z)(u)F(z,u)\rightarrow(u)F(x,u)$ [公理 e)作代入再用規則 δ']，

$(u)F(x,u)\to F(x,y)$ [公理 e) 作代入再用規則 δ'],

$(z)(u)F(z,u)\to F(x,y)$ [用規則 V],

$(z)(u)F(z,u)\to(x)F(x,y)$ [用則規 γ)],

$(x)(y)F(x,y)\to(y)(x)F(x,y)$ [用則規 γ) 及 δ)].

同法可得 $(y)(x)F(x,y)\to(x)(y)F(x,y)$, 再得(29).

公式(30): $(x)(F(x)\ \&\ G(x))\sim(x)F(x)\ \&\ (x)G(x)$.

證. 我們先證:

a) $(x)(F(x)\ \&\ G(x))\to(x)F(x)\ \&\ (x)G(x)$.

$(y)(F(y)\ \&\ G(y))\to F(x)\ \&\ G(x)$,

$F(x)\ \&\ G(x)\to F(x)$,

$F(x)\ \&\ G(x)\to G(x)$,

$(y)(F(y)\ \&\ G(y))\to F(x)$ [用規則 V],

$(y)(F(y)\ \&\ G(y))\to G(x)$ [用規則 V].

用規則 γ) 與 δ) 可把這兩個公式變成

$(x)(F(x)\ \&\ G(x))\to(x)F(x)$,

$(x)(F(x)\ \&\ G(x))\to(x)G(x)$.

由這兩者便可得

$(x)(F(x)\ \&\ G(x))\to(x)F(x)\ \&\ (x)G(x)$.

b) $(x)F(x)\ \&\ (x)G(x)\to(x)(F(x)\ \&\ G(x))$ 的證明.

$(y)F(y)\to F(x)$,

$(y)G(y)\to G(x)$,

$(y)F(y)\ \&\ (y)G(y)\to F(x)\ \&\ G(x)$,

$(x)F(x)\&(x)G(x)\to(x)(F(x)\&G(x))$. [用規則 γ) 與 δ)].

由 a) 與 b) 便得所欲證的公式.

公式(31): $(x)(F(x)\to G(x))\to((x)F(x)\to(x)G(x))$.

證. $(y)(F(y)\to G(y))\to(F(x)\to G(x))$,

$F(x)\to((y)(F(y)\to G(y))\to G(x))$ [用規則 VII],

$(y)F(y)\to F(x)$,

$(y)F(y)\to((y)(F(y)\to G(y))\to G(x))$ [用規則 V],

$(y)F(y)\,\&\,(y)(F(y)\to G(y))\to G(x)$ [用規則 VII],

$(x)F(x)\&(x)(F(x)\to G(x))\to(x)G(x)$ [用規則 γ)與 δ)],

$(x)(F(x)\to G(x))\to((x)F(x)\to(x)G(x))$ [用規則 VII].

公式(32): $(x)(F(x)\sim G(x))\to((x)F(x)\sim(x)G(x))$.

證. $(x)(F(x)\sim G(x))$ 爲下式的縮寫:

$$(x)[(F(x)\to G(x))\,\&\,(G(x)\to F(x))].$$

把公式(30)作代入得

$$(x)[(F(x)\to G(x))\,\&\,(G(x)\to F(x))]\sim(x)(F(x)\to G(x))\,\&\,(x)(G(x)\to F(x)).$$

由公式(31)得

$$(x)(F(x)\to G(x))\to((x)F(x)\to(x)G(x)),$$

$$(x)(G(x)\to F(x))\to((x)G(x)\to(x)F(x)).$$

因此我們有三個具有下列形式的公式:

$$\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C},$$

$$\mathfrak{B}\to(\mathfrak{D}\to\mathfrak{E}),$$

$$\mathfrak{C}\to(\mathfrak{E}\to\mathfrak{D}).$$

由此可推得 $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{D}\sim\mathfrak{E})$. 如果我們把 $\mathfrak{A},\mathfrak{D},\mathfrak{E}$ 所指的代入，便得到我們的斷言.

公式(33):

a) $(Ex)F(x)\sim\overline{(x)}\bar{F}(x)$.

b) $(Ex)\bar{F}(x)\sim\overline{(x)}F(x)$.

c) $\overline{(Ex)}\bar{F}(x)\sim(x)F(x)$.

d) $\overline{(Ex)}F(x)\sim(x)\bar{F}(x)$.

(33a)的證明:

$(y)\bar{F}(y)\to\bar{F}(x)$,

$\bar{\bar{F}}(x)\to\overline{(y)}\bar{F}(y)$ [用公式(6)相應的規則],

$F(x)\to\overline{(y)}\bar{F}(y)$ [把 $\bar{\bar{F}}(x)$ 替換爲 $F(x)$],

$(Ex)F(x)\to\overline{(x)}\bar{F}(x)$ [用規則 γ) 與 δ)].

這是公式(33a)的一半.

$F(x)\to(Ey)F(y)$ [由公理 f)],

$\overline{(Ey)}F(y)\to\bar{F}(x)$ [用公式(6)相應的規則],

$\overline{(Ex)}F(x)\to(x)\bar{F}(x)$ [用規則 γ) 與 δ)],

$\overline{(x)}\bar{F}(x)\to\overline{\overline{(Ex)}}F(x)$ [用公式(6)相應的規則],

$\overline{(x)}\bar{F}(x)\to(Ex)F(x)$ [把$\overline{\overline{(Ex)}}F(x)$替換爲$(Ex)F(x)$].

這便是公式(33a)的另一半.

(33b) 的證明: $A\sim\bar{\bar{A}}$,

$F(x)\sim\bar{\bar{F}}(x)$ [用代入法],

$(x)(F(x)\sim\bar{\bar{F}}(x))$ [用規則 γ'].

由此應用公式(32)可得

$(x)F(x)\sim(x)\bar{\bar{F}}(x)$,

$\overline{(x)}F(x)\sim\overline{(x)}\bar{\bar{F}}(x)$ [應用公式$(X\sim Y)\to(\bar{X}\sim\bar{Y})$],

[參見 9 頁的公式(26)].

由(33a)作代入得

$$(Ex)\bar{F}(x)\sim\overline{(x)}\bar{\bar{F}}(x),$$

故

$$\overline{(x)}F(x)\sim(Ex)\bar{F}(x).$$

這便是公式(33b).

由(33a)與(33b)可得公式(33d)與(33c),因由 $\mathfrak{A}\sim\bar{\mathfrak{B}}$ 可以推出 $\bar{\mathfrak{A}}\sim\mathfrak{B}$.

公式(34): $(x)(F(x)\to G(x))\to((Ex)F(x)\to(Ex)G(x))$.

證. 由命題演算的公式(譯者按,卽公式(6))

$$(A\to B)\to(\bar{B}\to\bar{A})$$

經過代入可得

$$(F(x)\to G(x))\to(\bar{G}(x)\to\bar{F}(x)),$$

$$(x)\{(F(x)\to G(x))\to(\bar{G}(x)\to\bar{F}(x))\}$$ [用規則 γ'].

由這公式再應用公式(31)可得

$$(x)\{F(x)\rightarrow G(x)\}\rightarrow(x)\{\bar{G}(x)\rightarrow\bar{F}(x)\}.$$

再應用一次公式(31),然後由規則 V 可得

$$(x)(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow((x)\bar{G}(x)\rightarrow(x)\bar{F}(x)).$$

應用公式(6),可把這公式中的 $(x)\bar{G}(x)\rightarrow(x)\bar{F}(x)$變成 $\overline{(x)}\bar{F}(x)\rightarrow\overline{(x)}\bar{G}(x)$. 因爲 $\overline{(x)}\bar{F}(x)\sim(Ex)F(x)$, $\overline{(x)}\bar{G}(x)\sim(Ex)G(x)$, 故得所欲證的公式.

相應於公式(34)的有下列規則: 如果 $\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{B}(x)$ 可證,則我們亦可推出 $(Ex)\mathfrak{A}(x)\rightarrow(Ex)\mathfrak{B}(x)$.

因爲,由 $\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{B}(x)$ 使用規則 γ',可得

$$(x)(\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{B}(x)),$$

再應用(34)可得 $(Ex)\mathfrak{A}(x)\rightarrow(Ex)\mathfrak{B}(x)$.

完全和由(31)推出公式(32)那樣,由(34)可推出公式

(34′) $(x)(E(x)\sim G(x))\rightarrow((Ex)F(x)\sim(Ex)G(x))$.

公式(35): $(x)(F(x)\rightarrow A)\sim((Ex)F(x)\rightarrow A)$.

證. $(x)(F(x)\rightarrow A)$ 爲 $(x)(\bar{F}(x)\vee A)$ 的縮寫.

與公式(26)的證明相似,我們可證得公式

$$(x)(\bar{F}(x)\vee A)\sim(x)\bar{F}(x)\vee A.$$

但

$$(x)\bar{F}(x)\sim\overline{(Ex)}F(x),$$

$$(x)\bar{F}(x)\vee A\sim\overline{(Ex)}F(x)\vee A.$$

再用縮寫符號→,我們便得(35).

公式(36): $(Ex)(y)F(x,y)\rightarrow(y)(Ex)F(x,y)$.

這是上面早已提過的交換公式,並且我們亦早已指出過,這只是單向的推論關係.

證. $F(x,y)\rightarrow(Ez)F(z,y)$ [公理 f) 作代入並用規則 δ'],

$(y)(F(x,y)\rightarrow(Ez)F(z,y))$ [用規則 γ'].

應用公式(31)得

$(y)F(x,y)\to(y)(Ez)F(z,y)$,

$(Ex)(y)F(x,y)\to(y)(Ex)F(x,y)$. [用規則 γ) 與 δ)].

公式(37): $(x)(y)F(x,y)\to(x)F(x,x)$.

證. $(y)(z)F(y,z)\to(z)F(x,z)$ [公理 e) 作代入並用規則 δ)],

$(z)F(x,z)\to F(x,t)$ [同樣推導][1],

$(y)(z)F(y,z)\to F(x,t)$ [用規則 V],

$(y)(z)F(y,z)\to F(x,x)$ [用規則 α 2)],

$(y)(z)F(y,z)\to(x)F(x,x)$ [用規則 γ)].

再用規則 δ) 便得到欲證的公式.

§7. 替換規則;一公式的否定的作成

在我們已經導出了一系列的永眞公式以後，現在我們將討論一些一般規則，它們對於鳥瞰整個永眞公式系統這一點具有重要性.

作爲第一個規則的是規則 VI 的推廣. 規則 VI 說，兩個互相推出的命題，卽兩個彼此等値的命題，可以彼此替換. 我們今用以下方式推廣這個替換規則[2].

規則 X. 設 $\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)$ 與 $\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)$ 爲隨意兩個公式，其中含有自由變元 $x, y, \cdots, u$，但不再含有其它自由變元. 又設 $\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)$ 爲一個可證公式. 今設我們有一公式 $\mathfrak{C}$，其中 $\mathfrak{A}(\cdots)$ 作爲部分公式而一次或多次地出現，而 $x,y,\cdots,u$ 則可塡以某些變元；又設 $\mathfrak{D}$ 爲一個公式，它是由 $\mathfrak{C}$ 依照規則 α 3) 把一處或多處的 $\mathfrak{A}(\cdots)$ 換爲 $\mathfrak{B}(\cdots)$ 而得，則 $\mathfrak{C}\sim\mathfrak{D}$ 亦爲一個可證公式.

---

1) 本行及次行的變元 t 原文是寫作 y 的，這樣次行的式子便不成公式了(因 y 既約束又自由)，今改正——譯者註.

2) 這裏說的是"AB 彼此推出"或"A 等值 B"，但下文說的却是"$A\sim B$"，這三個關系是否一致，本書未作討論——譯者註.

因為我們已有規則 VI，所以只要如下證明便够了：我們可在等價式(原文作等值式)$\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)$兩端，對$\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)$與$\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)$冠以相同的量詞，即比如說，我們可寫

$$(Ex)(y)\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim(Ex)(y)\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u).$$

而這又只須就一個量詞來證明便够了．因此，我們須指出

$$(x)\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim(x)\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)$$

與

$$(Ex)\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim(Ex)\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)$$

是可證的。

由$\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)$，依規則$\gamma'$可得

$$(x)(\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u)).$$

應用公式(32)可得

$$(x)\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim(x)\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u),$$

同樣，根據公式(34′)可得

$$(Ex)\mathfrak{A}(x,y,\cdots,u)\sim(Ex)\mathfrak{B}(x,y,\cdots,u).$$

作為另一結果，我們可由此推出關於一個公式的否定的構成規則．

規則 XI．如果一個公式中沒有縮寫記號→與～出現，則其否定可如下構成，首先把全稱號與存在號彼此互換；其次，記號 & 與 ∨ 彼此互換；第三，命題記號或謂詞記號與它們的否定彼此互換．

這個規則的證明如下．

如果所討論的公式不含有全稱號與存在號，則這規則在命題演算處早已證明．如果我們把量詞(原文只提全稱號)與其作用區域看作一個不可分的整體而應用這個規則（在命題演算中已證明過的)，我們永可把整個表達式的否定號移到各個最外面的量詞號之上(如果整個表達式是在一個量詞之下，那末一開始便是這種情形了)．由公式(33)得

$$\overline{(x)}\mathfrak{A}(x)\sim(Ex)\overline{\mathfrak{A}}(x),$$

$$\overline{(Ex)}\mathfrak{A}(x)\sim(x)\overline{\mathfrak{A}}(x).$$

利用這些等價式(原文作等値式,今改),我們可把否定號從量詞號上移到其作用區域上去. 對這些作用域,我們又和上面對整個表達式那樣同法處理. 最後,否定號便全被推移到命題記號或謂詞記號上去.

這種變形方法可用例子說明. 今試依本規則而對以下公式

$$\overline{(x)(Ey)(\bar{F}(x,y)\vee(Ez)G(x,y,z))}$$

求其變形後的相應表達式. 首先由公式(33)得

$$\overline{(x)}(Ey)(\bar{F}(x,y)\vee(Ez)G(x,y,z))\sim(Ex)\overline{(Ey)}(\bar{F}(x,y)\vee(Ez)G(x,y,z)),$$

其次,繼續可得等價的表達式(原文亦作"等値").

$$(Ex)(y)\overline{\bar{F}(x,y)\vee(Ez)G(x,y,z)}.$$

再應用本定理在命題演算時的特例以及規則 X 得

$$(Ex)(y)(F(x,y)\ \&\ \overline{(Ez)}G(x,y,z)),$$

最後得

$$(Ex)(y)(F(x,y)\ \&\ (z)\bar{G}(x,y,z)).$$

最後一式正是由我們的規則所得的相應表達式.

§8. 推廣的對偶原則;範式

由前節的規則 XI 可推出一個**對偶原則**,它可看作以前在命題演算處所推出的對偶原則的推廣. 這推得的規則是:

由一個具有蘊涵式形狀或等價式形狀的可證公式,其中前後件均不再含有記號→與～,我們又可如下法得出另一個可證公式:把所有全稱號與存在號互換,又把記號 & 與 ∨ 互換. 在蘊涵式的情形下,我們還要把前後件的次序顛倒.

證. 如果 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是可證公式,則 $\overline{\mathfrak{B}}\to\overline{\mathfrak{A}}$ 亦然,如果 $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ 爲可證公式,則 $\overline{\mathfrak{A}}\sim\overline{\mathfrak{B}}$ 亦然. 我們便依照前章的規則 XI 把 $\overline{\mathfrak{A}},\overline{\mathfrak{B}}$ 變形. 這樣,我們便把全稱號與存在號對調,記號 & 與 ∨ 對調,並把命題記號及謂詞記號換爲其否定. 但因爲這些本是可證公式,因此如

果根據代入原則把所有的命題記號及謂詞記號都分別代以它們的否定，我們便可把最後這種對調又對調囘來了．

這個推廣的對偶原則可以一下子給我們以大量的永眞公式，只須對以前已經推出的公式作對偶變形便成．今給出最重要的幾個[1]．

公式(26′)：　$(Ex)(A \,\&\, F(x)) \sim A \,\&\, (Ex)F(x)$.

公式(28′)：　$(Ex)(A \vee F(x)) \sim A \vee (Ex)F(x)$.

公式(29′)：　$(Ex)(Ey)F(x,y) \sim (Ey)(Ex)F(x,y)$.

公式(30′)：　$(Ex)(F(x) \vee G(x)) \sim (Ex)F(x) \vee (Ex)G(x)$.

公式(37′)：　$(Ex)F(x,x) \rightarrow (Ex)(Ey)F(x,y)$.

與規則 X 相合併，公式(29)與(29′)給我們一個新的規則．

規則 XII．　如果把兩個或多個直接彼此相繼的有相同作用區域的全稱號隨意的顚倒次序，則一個公式便變成它的等價式(原文作等值式)．對於存在號，相應的規則亦成立．

在命題演算的討論處我們已經指出，可以把所有的複合命題都變到一個共通的範式．我們可把複合命題，或者表成簡單析取式的合取式，或者表成基本合取式的析取式．

在謂詞演算中亦有一定的範式．即，可把每一個表達式換成下面的一種，其中所有出現的量詞都非否定地放在最前面，沒有括號把它們彼此隔開，因而它們的作用區域全都延展到公式之末[2]．這種範式我們叫做前束範式．

這種範式的優點在於：在量詞以後的整個表達式可以當作(命題演算中的——譯者)複合命題而處理．要變成範式可用下法得到．

---

1) 由這些公式的標號可以認出，這些相應的公式到底是對哪一個已證公式應用對偶原則而得出的．

2) 正如在命題演算中一樣，這種表達式並非唯一的．

首先,在所處理的表達式中把縮寫號→與～換回它們的意義. 經過多次應用前節的規則 XI 容易得到: 可把否定橫綫只放在命題變元與謂詞變元的上面. 再把約束變元的記號更改,使得所有的量詞都關於不同的變元. 例如把

$$(x)F(x) \vee (x)G(x)$$

改寫爲

$$(x)F(x) \vee (y)G(y)$$

等等.

在所得的邏輯表達式中, 如果把所有的量詞依照其出現的次序放在整個公式之前, 其餘則一切照舊不變, 我們便得到範式了. 這時所有的量詞的作用區域都一直延展到公式之末.

最後這個變形的確是合法的,可如下證明. 如果沒有量詞出現, 那末這個斷言並沒有更改什麼東西[1]. 今設對於所處理的表達式含有較少的量詞時這個變形的合理性已經證明了. 則對目前的表達式言, 如果整個表達式都在一個量詞號之後, 那末斷言的合理性是顯然的, 我們只須把這個量詞的作用區域 (它含有較少的量詞號)作變形便成了. 否則可就該表達式的第一個量詞號而討論. 它是不會在別的量詞號的作用區域之中的. 應用已經推出的公式:

$$A \vee (x)F(x) \sim (x)(A \vee F(x)),$$
$$(x)F(x) \vee A \sim (x)(F(x) \vee A),$$
$$A \,\&\, (x)F(x) \sim (x)(A \,\&\, F(x)),$$
$$(x)F(x) \,\&\, A \sim (x)(F(x) \,\&\, A)$$

以及相應的關於存在號的公式, 我們便可把這個量詞移到整個公式的前面去,而其作用區域延展於整個公式之上. 因此我們便同

1) 原文把本句和次句的次序弄顛倒了, 不合數學歸納法的要求, 今特改正——譯者註.

到了上述情形，因而上述變形的合理性便得到了證明.

前束範式有下述的優點，即當對謂詞演算作一般性的探究時，被處理的公式的範圍可以得到一個顯著的限制. 但是一公式前面的全稱號與存在號的組合，我們叫做該公式的首標，其式樣的可能性仍有驚人地複雜. 關於這一點，斯科林的結果[1]是很有興趣的，這結果可說是對上述的前束範式定理作了一定程度的加強. 斯科林定理(照我們這裏所用的表述法)如下：

對應於謂詞演算中每一個公式，我們都可以給出另一個公式，它不但有前束範式之形，而且其中每一個存在號都在所有全稱號之前，此外，這公式可與原公式互相推出.

今後我們將把一個屬於前束範式的並且其中沒有一個存在號跟在任何全稱號之後的公式叫做具有斯科林範式的公式. 爲了證明這個定理，我們可只考慮那些具有前束範式的公式. 其次，我們還可假定，這個公式不含有自由客體變元. 如果這種變元居然出現[根據公理 e) 及規則 γ']，我們可以在所給的公式前面，加上相應於該自由客體變元的全稱號，然後處理所得的公式. 在這類公式中，如果有 n 個全稱號其後面是跟有存在號的，我們說該公式的級爲 n. 因此，我們只須證明，每一個具有前束範式形狀的公式，如果它不屬於斯科林範式，一定可以作出一個與它彼此可以互推的公式而其級數減少. 我們還可以假定，在所處理的公式的首標中，是以存在號開始的. 因爲，如果一個公式 $\mathfrak{A}$ 是以全稱號開始的，我們可取一個不出現於 $\mathfrak{A}$ 中的客體變元，設爲 u，與一個謂詞變元，設爲 G，而把 $\mathfrak{A}$ 換爲公式

$$(Eu)(\mathfrak{A}\ \&G(u) \vee \overline{G}(u)).$$

---

1) Skolem, Th.: Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. Vid. Skrifter I, Mat.-nat. Klasse, 1920, Nr. 4.

我們容易看見,就可推性來說,它是與 $\mathfrak{A}$ 等價的,因爲 (Eu) 的作用區域是把一個永眞的合取項併到 $\mathfrak{A}$ 去而成的. 而公式 $(Eu)(\mathfrak{A}\,\&\,G(u)\vee\overline{G}(u))$ 可以變成一個以存在號開始的前束範式.

因此我們的公式以 n 個 $(n\geq 1)$ 存在號開始,其後至少跟有一個全稱號. 因此具有下形

$$(Ex_1)\cdots(Ex_n)(y)\mathfrak{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y), \tag{I}$$

其中 $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 是一個具有前束範式的公式, 所含有的自由客體變元只有 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y$. 設 H 爲一個 $n+1$ 項的謂詞變元,不出現於 $\mathfrak{B}$ 中的. 今作成以下公式

$$(Ex_1)\cdots(Ex_n)[(Ey)(\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)\,\&\,\overline{H}(x_1,\cdots,x_n,y))\vee \vee(z)H(x_1,\cdots,x_n,z)]. \tag{II}$$

這個公式與(I)是彼此可以互推的.

因爲,如果對(II)用規則 $\alpha 3$) 把 H 換爲 $\mathfrak{B}$ 我們便得

$$(Ex_1)\cdots(Ex_n)[(Ey)(\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)\,\&\,\overline{\mathfrak{B}}(x_1,\cdots,x_n,y))\vee \vee(z)\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,z)].$$

然後可以再除去永假的那一部分

$$(Ey)(\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)\,\&\,\overline{\mathfrak{B}}(x_1,\cdots,x_n,y)).$$

要由(I)推出(II)却比較麻煩. 首先在公式(31)中把約束變元改名得

$$(y)(F(y)\rightarrow G(y))\rightarrow((y)F(y)\rightarrow(y)G(y)).$$

再由命題演算的規則(規則 VII)可把一公式

$$\mathfrak{A}\rightarrow(\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{C})$$

變形爲

$$\mathfrak{B}\rightarrow(\overline{\mathfrak{A}}\vee\mathfrak{C}).$$

再用構造否定的規則,並注意 $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ 爲 $\overline{\mathfrak{A}}\vee\mathfrak{B}$ 的縮寫,我們便得

$$(y)F(y)\rightarrow(Ey)(F(y)\,\&\,\overline{G}(y))\vee(y)G(y),$$

在這公式中把 $F(y)$ 代入以 $\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)$,把 $G(y)$ 代以 $H(x_1,\cdots,x_n,y)$,我們得

$$(y)\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)\to(Ey)(\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)\ \&\ \overline{H}(x_1,\cdots,x_n,y))\vee$$
$$\vee(y)H(x_1,\cdots,x_n,y).$$

經過多次使用在公式(34)的證明的末尾處所列的規則,我們更得

$$(Ex_1)\cdots(Ex_n)(y)\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)\to$$
$$\to(Ex_1)\cdots(Ex_n)((Ey)(\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)\ \&$$
$$\&\ \overline{H}(x_1,\cdots,x_n,y))\vee(y)H(x_1,\cdots,x_n,y)).$$

由蘊涵規則及改名規則 δ) 便得出公式(II).

現在再把公式(II)變成前束範式. 它可成爲下列的樣子,以$(Ex_1)(Ex_2)\cdots(Ex_n)(Ey)$開始,繼以$\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_n,y)$中的全稱號和存在號依原來的次序而出現,最後則爲全稱號(z). 因爲相應的公式(II)的級數比(I)的級數少1,所以斯科林範式定理便得到了證明.

§9. 公理系統的不矛盾性及獨立性

以前我們用以證明公理 a)至 d)的不矛盾性及獨立性的方法,即算術解釋的方法,現在也使我們能够證明**整個謂詞演算**的公理系統,在以前所規定的意義上,亦是不矛盾的. 但當時的算術解釋只對命題變元而作,現在我們必須把它推廣到以前還未提及的記號上. 這可照下列方式進行:

我們對謂詞記號與命題記號同樣處理. 我們把兩者都當作算術變元,可取值0,1; 但不取它值. 至於謂詞記號的空位處是如何填寫的,我們全不考慮. 量詞也悉數删去. 聯結詞仍當作算術乘法,而$\overline{0}$理解爲1,$\overline{1}$理解爲0.

依照這個約定,首先可得,所有的公理,包括公理 e)與 f)在內,在這個算術意義之下永取值0. 我們又容易看出,如果一個或多個公式永取值0,則依照我們的規則而推出的每一個公式亦永取值0. 但另一方面,互相否定的兩個表達式,不可能同時永爲0. 由此可推得,由我們的公理所推出的公式,沒有兩個是互相否定的. 不矛盾性的條件是滿足了.

關於我們的公理不矛盾性能够證明這點,我們不應估價過高.因爲,所給的不矛盾性的證明,在它的內容意義上看來,只在於我們作下列的假設而得,即作爲基本的個體域只由唯一的一個元素組成,因而是有限多個的.從它我們根本得不到保證,使得即使把一些在內容上無可疵議的假設表爲符號而引入我們的系統後,所得的可證公式系統仍能保持不矛盾.例如,下列的問題便未曾解决,把數學公理加入到我們的演算後,是否任意一個公式均可證明(即是否產生矛盾——譯者).對於數學來說,這個問題的解决是佔着中心的地位的,它所牽涉的困難,與我們目前所處理的問題所牽涉的根本無法比較.在數學公理中我們一開始便假設一個無窮的個體域,而無窮這個概念便關連着困難與諍論,這些困難與諍論在數學基礎的討論中起着很大的作用.爲了把後面這個問題能够成功地處理,希爾柏脫建立了一個特殊的理論.要深入這個理論,當然要用數理邏輯的結果,但却不在本書範圍之內.我們只好一次次地向讀者介紹希爾柏脫與伯爾奈斯的書[1].

現在再回到我們的公理系統去.我們想證明該公理系統的**獨立性**,即指出,公理a)至f)中,以及在推出謂詞演算的永眞公式時所用的規則$\alpha1$)至$\alpha3$)及β),γ),δ)中,沒有一個是可省的[2].在下述的獨立性的證明中,我們要用到已證明了的該演算的不矛盾性.

首先,我們指出,公理a)至d)中沒有一個是多餘的,因而其中隨便那一個不可能由其它公理借助於推理規則而導出.這時我

1) 希爾柏脫與伯爾奈斯,數學基礎(Grundlagen der Mathematik), Bd. I., 1934, Bd. II., 1939, 柏林.

2) 同時(即本書第一版出版後)麥克堅西(McKinsey)給出一個獨立性的證明.參見 McKinsey, J. C. C.: On the independence of Hilbert and Ackermann's postulates for the calculus of propositional functions, Amer. J. Math., Vol. 58. 更簡單的(迄今尙未發表的)證明則是由 P. Bernays 及 Arnold Schmidt 先生告知作者的.本書所發表的便是按照 Bernays 的思想而作的.

們利用以前(第一章 §13)已證明的事實,即在純粹命題演算中,這些公理沒有一個是可省的,並且即使加入了新公理 $X\to X$ 即 $\bar{X}\vee X$ 後,仍然沒有一個是可省的.

假設有一個證明,使得公理 a) 至 d) 中隨便那一個公理可由其餘公理借助於謂詞演算中的推理規則而導出. 我們試把這證明所用到的公式中的謂詞變元及客體變元按下列方式加以删除:全稱號及存在號簡單地删除. 每一個謂詞變元連其變目均以命題變元 X 代之. 經過這個變換後 e) 與 f) 便變成公式 $X\to X$.

這時證明的特性仍然保持着. 依照規則 $\alpha1$) 至 $\alpha3$) 所作的代入變成命題演算中的代入,或者簡直只是重複抄寫. 以前通過蘊涵規則而結合的公式現在仍然照舊. 規則 γ) 與改名規則變成了重複抄寫. 因此,公理 a) 至 d) 中某一個公理便由這四公理中其餘的公理及 $X\to X$ 依照命題演算的規則而推出,這與以前所得的結果相矛盾.

公理 e) 的獨立性可如下證明,即凡不利用該公理而能推出的一切公式都具有某一種刻劃性質而該公理却不具有刻劃性質. 事實上,設我們把各公式如下改變,即從最內部的作用區域起,凡具有 $(x)\mathfrak{A}(x)$, $(y)\mathfrak{A}(y)$ 等形的部分公式都換為 $(x)\mathfrak{A}(x)\vee X\vee\bar{X}$, $(y)\mathfrak{A}(y)\vee X\vee\bar{X}$ 等,這樣,凡是無須用及公理 e) 即能推出的每一個公式都仍然變成一個在謂詞演算中可以推出的公式. 因為,經過這個變換後,公理 a) 至 d) 及公理 f) 都不受影響. 代入規則 α), 蘊涵規則,規則 $\gamma2$) 與改名規則 δ) 對各公式所作的連系仍然有效. 至於對規則 $\gamma1$) 言,其終結公式 $\mathfrak{A}\to(x)\mathfrak{B}(x)$ 變成形如 $\mathfrak{A}'\to(x)\mathfrak{B}'(x)\vee X\vee\bar{X}$ 的公式,即變成一個可推出的公式. 反之,公理 e) 即

$$(x)F(x)\to F(y) \text{ 却變成 } (x)F(x)\vee X\vee\bar{X}\to F(y),$$

這顯然是推不出的,因為由它的前件的眞確性可推得 $F(y)$, 再根據規則 $\alpha3$) 作代入便得 $\bar{F}(y)$;因而便得到一個矛盾.

完全同樣,如果不把部分公式 $(x)\mathfrak{A}(x)$ 換為 $(x)\mathfrak{A}(x)\vee X\vee\bar{X}$,

却把 $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ 換爲 $(Ex)\mathfrak{A}(x)\&X\&\bar{X}$，便可以證明 f) 的獨立性[1].推演的方式是完全類似的.

用同樣的方法我們還可以證明規則 $\gamma1)$ 與 $\gamma2)$ 的獨立性. 這時我們把公式 $(x)\mathfrak{A}(x)$ 換爲 $(x)\mathfrak{A}(x)\&X\&\bar{X}$,那末在謂詞演算中凡不用 $\gamma1)$ 而能推出的公式都變成一個可推出的公式. 但整個公理系統所能推出的公式 $(x)(F(x)\vee\bar{F}(x))$ 却變成一個推不出的公式 $(x)(F(x)\vee\bar{F}(x))\ \&\ X\ \&\ \bar{X}$. 這樣便得出規則 $\gamma1)$ 的獨立性. 若把 $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ 換爲 $(Ex)\mathfrak{A}(x)\vee X\vee\bar{X}$,同樣地便得出規則 $\gamma2)$ 的獨立性,因爲依照這個變換,$\overline{(Ex)}(F(x)\&\bar{F}(x))$ 便變成一個推不出的公式了.

規則 $\alpha1)$ 的獨立性可如下得出,如果沒有這條規則,則含有個體變元的可證公式只能是具有下列樣式的公式:

$$(x)\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{A}(y);\quad \mathfrak{A}(y)\rightarrow(Ex)\mathfrak{A}(x);\quad (x)\mathfrak{A}(x)\rightarrow(x)\mathfrak{A}(x);$$

$$(Ex)\mathfrak{A}(x)\rightarrow(Ex)\mathfrak{A}(x);\ (Ez)((x)\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{A}(z));\ (Ez)(\mathfrak{A}(z)\rightarrow(Ex)\mathfrak{A}(x)),$$

或者由這些公式通過個體變元的代入或者通過約束變元的改名而得出公式. 因爲公理 e) 與 f) 具有這些形式而通過其餘的推理規則也永遠只得這一類的公式. 因此,比如說,不用規則 $\alpha1)$ 便不能把公式 $(x)F(x)\rightarrow(Ex)F(x)$ 推出.

規則 $\alpha2)$ 的獨立性可借助於下列的變換而得出. 試考察各公式內的謂詞變元,如果它的某些空位處被個體變元 z 填充,便把該空位删除. 例如把 $F(x,z)$ 變成 $F(x)$,$G(z)$ 變成 G 等等. 經過這樣變換後,凡是未用到個體變元的代入規則而作出的證明都仍然變成一個證明. 又因各公理不受這個變換的影響,因此經過這個變換後,所有的公式,只要它不必用到 $\alpha2)$ 而推出的,依然變成可推出的公式. 但是可證公式 $(x)F(x)\rightarrow F(z)$ 却被這個變換變成

1) 公理 f) 的獨立性當然並不影響到下列的事實,即在這公理系統中,存在號原則上是可以省去的. 因爲,我們可把 $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ 當作 $\overline{(x)}\,\overline{\mathfrak{A}(x)}$ 的縮寫 (參見 60 頁).

一個當然推不出的公式 $(x)F(x)\to F$（這裏第二個 F 是一個命題變元）.

用同樣方式可以證明改名規則 δ）的獨立性．上面是對公式中的自由個體變元 z 而作的變換，現在改爲對約束變元 z 而作，同時把記號 (z) 及 (Ez) 也删除．這樣，凡不用改名規則所能推出的公式亦變成一個可推公式．反之，可推公式 $(z)F(z)\to F(x)$ 却變成一個當然推不出的公式 $F\to F(x)$.

要證明規則 $\alpha3$）的獨立性，我們把凡是具有 $(x)\mathfrak{A}(x)$，$(y)\mathfrak{A}(y)$ 等等形狀的部分公式，只要它含有謂詞變元 G，便都換爲 $(x)\mathfrak{A}(x)\vee X\vee\bar{X}$，$(y)\mathfrak{A}(y)\vee X\vee\bar{X}$ 等．這時凡不用規則 $\alpha3$）而可推出的公式仍然變成一個可推公式，反之，公式 $(x)G(x)\to G(y)$ 却不成立．

蘊涵規則的不可省性可如下得到，卽如果沒有這個規則，那就只有 $\bar{\mathfrak{A}}\vee\mathfrak{B}$ 形的公式才是可以推出的公式．因爲，所有公理都有這種形狀，除規則 β）以外的各規則亦都給出這樣的公式．因此，比如說，不用規則 β）便不能推出公式 $X\vee\bar{X}$ 了．

§10. 公理系統的完備性

我們在第一章（§13）已經說過，一公理系統的完備性可用兩種方式來定義．在加強意義下的完備性是指：如果把一個以前推不出的公式加到公理去後，永遠得到一個矛盾．對這裏的系統說，這種意義的完備性是沒有的．爲了要確證本公理系統的不完備性，我們只須找出一個公式，按照我們在不矛盾性的證明處所用到的算術解釋來說，這公式永遠取值 0，但它却不是本公理系統的推論．這樣的一個公式是

$$(Ex)F(x)\to(x)F(x).$$

這個公式之不能由本公理系統推出，我們已經由下列的想法而可以相信了，因爲它所表示的斷言："如果有一個 x 使 $F(x)$ 成立，則對於一切 x，$F(x)$ 成立"，顯然這不是普遍有效的．事實上，如果

個體域包含多於一個元素，它不是對於任意謂詞 F 都眞確的.

要嚴格形式地來證明這個公式不可能由本公理系統推出，可用以下方式.

首先，我們給出一個過程，由它可把一個邏輯公式變成只含命題變元的公式. 相應於公式中每一個自由變元我們都加一個全稱號於公式之前，因而把其中的自由變元除去. 其次，我們由外而內地作下列的變換[1)]

$$(x)\mathfrak{A}(x) \text{ 換爲 } \mathfrak{A}(1) \mathbin{\&} \mathfrak{A}(2),$$
$$(Ex)\mathfrak{A}(x) \text{ 換爲 } \mathfrak{A}(1) \vee \mathfrak{A}(2).$$

因而又把量詞除去了.

在我們的公式中，除却命題變元外，還含有 $F(1)$, $F(2)$, $G(1,2)$ …等命題.

所有這些不同的命題我們再換以(不同的)命題變元.

我們今斷言，作這個變形後，由本公理系統所能推出的每一個公式都變成一個(命題演算內的)永眞的複合命題.

我們先就公理而證明. 對公理 a) 至 d) 說，它是顯然的，因爲這些公理不因這個變形而改變. 公理 $(x)F(x)\to F(y)$ 則照下列方式而變形:

$$(y)((x)F(x)\to F(y)),$$
$$((x)F(x)\to F(1)) \mathbin{\&} ((x)F(x)\to F(2)),$$
$$(F(1) \mathbin{\&} F(2)\to F(1)) \mathbin{\&} (F(1) \mathbin{\&} F(2)\to F(2)),$$
$$(A \mathbin{\&} B\to A) \mathbin{\&} (A \mathbin{\&} B\to B).$$

這的確是一個永眞的複合命題.

同樣地，對公理

$$F(y)\to(Ex)F(x)$$

1) 這裏 1 與 2 是一些客體的固有名詞. 因此在內容上這個除去量詞的方法乃由於我們假定，個體域只含有兩個元素，1 與 2.

有下列的變形:

$$(y)(F(y)\to(Ex)F(x)),$$

$$(F(1)\to(Ex)F(x))\ \&\ (F(2)\to(Ex)F(x)),$$

$$(F(1)\to F(1)\vee F(2))\ \&\ (F(2)\to F(1)\vee F(2)),$$

$$(A\to A\vee B)\ \&\ (B\to A\vee B).$$

這同樣是一個永眞的公式. 現在我們只需再證明, 應用規則 α), β), γ), δ) 後並不改變這個性質.

設我們有兩個公式,其中第二個是由第一個經過運用規則 α1) 或 α3) 而得的, 那末在變形後所得的兩公式或者借命題演算中的代入規則而聯系着,或者後一公式是一些公式的合取,而每個合取項都是由前一公式經過命題演算中的代入規則而得的. 至於規則 α2) 與 δ),它們所聯系的公式變成簡單的重複抄寫. 如果公式中不出現有客體變元的話,蘊涵規則保持原形. 如果蘊涵規則所聯系的公式中含有自由客體變元的話, 那末總可以用置全稱號於公式之前的辦法而除掉. 例如由

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(x)\\ \mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B}(x)\end{array}}{\mathfrak{B}(x)}$$

而得一新規則

$$\frac{\begin{array}{c}(x)\mathfrak{A}(x)\\ (x)(\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B}(x))\end{array}}{(x)\mathfrak{B}(x)}.$$

除去全稱號後我們得

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(1)\ \&\ \mathfrak{A}(2)\\ (\mathfrak{A}(1)\to\mathfrak{B}(1))\ \&\ (\mathfrak{A}(2)\to\mathfrak{B}(2))\end{array}}{\mathfrak{B}(1)\ \&\ \mathfrak{B}(2)}.$$

但這個規則却是命題演算的規則. 如果有多個自由客體變元出現,亦可同法處理.

最後可討論 γ). 經過我們的變形後,下列表達式

$$\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}(x)$$

變成(如果 $\mathfrak{A}$ 不再含有自由變元)

$$(x)(\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}(x)),$$

$$(\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}(1))\ \&\ (\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}(2)),$$

等. 而 $\mathfrak{A}\rightarrow(x)\mathfrak{B}(x)$ 則變成

$$\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}(1)\ \&\ \mathfrak{B}(2).$$

根據命題演算的規則這兩個公式是等價的. 如果 $\mathfrak{A}$ 含有自由變元,結果亦同. 相應地,規則 γ) 中關於加入存在號的那一部分亦同樣成立.

因此,我們的確指出了,經過我們的變形後,每一個由我們的公理推出的公式都變成一個永眞的複合命題.

但

$$(Ex)F(x)\rightarrow(x)F(x)$$

却沒有這個性質,因爲它變形爲

$$F(1)\vee F(2)\rightarrow F(1)\ \&\ F(2),$$

$$A\vee B\rightarrow A\ \&\ B,$$

而這並不是一個永眞的命題演算的公式.

我們已經證明了,就加強的意義來說,這公理系統不是完備的. 我們要問,對 40 頁所提到的另一個意義的完備性,在這裏是否成立? 即是說,由我們的公理系統是否可以把謂詞演算中所有的永眞公式(依照我們在本章 §5 開首處所作的定義言)都推出來. 這種意義的完備性它却是具有的. 這是首先由哥德爾證明的,下面我們便推演出這證明來[1].

根據 §8 結尾處的討論,對謂詞演算中每一個公式我們都可以

1) Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Physik, Bd. 37 (1930).

給出一個具有斯科林範式的公式，使它們彼此可以互推．因此我們只限於證明，所有具有斯科林範式的永眞公式都是可以推出的[1]．

設

$$(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$$

是這樣的一個公式．

首先，我們可以注意，由一個無窮系列的客體變元 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 所組成的 k-組 $(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$ 是可數的，我們可照熟知的方式計數，卽先依照指標的和 $(i_1+i_2+\cdots+i_k)$ 的大小而排列，其次，如果指標的和相等，則按辭典次序排列，因此可排成下面的一列：$(x_0,x_0,\cdots,x_0)$；$(x_0,x_0,\cdots,x_1)$；$(x_0,x_0,\cdots,x_1,x_0)$；$\cdots$．我們把第 n 個 k-組記爲 $(x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k})$．此外再以 $\mathfrak{B}_n$ 表示公式

$$\mathfrak{A}(x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k};\ x_{(n-1)l+1},x_{(n-1)l+2},\cdots,x_{nl}).$$

注意，在這公式中，分號以後的客體變元與分號以前的變元是絕不相同的；同時亦是與在以前的公式 $\mathfrak{B}_p(p<n)$ 中所曾出現過的一切變元都不相同的．反之，當 $n>1$ 時，變元 $x_{n_1}\cdots,x_{n_k}$ 却已經在 $\mathfrak{B}_p(p<n)$ 中出現過了．今再以 $\mathfrak{C}_n$ 表示析取式 $\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2\vee\cdots\vee\mathfrak{B}_n$，把相應於所有自由變元的全稱號置於公式 $\mathfrak{C}_n$ 之前，所得的公式記爲 $\mathfrak{D}_n$．現在我們依照下法把每一個公式 $\mathfrak{C}_n$ 都對應於命題演算中的一個公式．我們把這公式中的每一個基本成分，卽命題變元及以自由變元爲變目的謂詞變元，都換以命題變元，並且相同的基本成分換以相同的命題變元，不同的基本成分換以不同的命題變元．由 $\mathfrak{C}_n$ 依照這法所得的命題公式記爲 $\mathfrak{E}_n$．顯然 $\mathfrak{E}_n$ 具有下列性質：應用代入規則 $\alpha 1$）後，由 $\mathfrak{E}_n$ 可以得出 $\mathfrak{C}_n$．

現在我們有下列兩個可能性：

---

1) 由 §5 可知，我們的公理系統具有以下性質，由永眞公式只能推出永眞公式．所以只要原公式是永眞的，相應的斯科林公式亦必是永眞的，故我們可作這個限制——譯者註．

1. 存在一個 n 使得 $\mathfrak{E}_n$ 是命題演算中的永眞公式.

2. 不存在一個 n 使得 $\mathfrak{E}_n$ 是命題演算中的永眞公式.

我們將證:

(A) 如果是第一情形,則

$$(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$$

可以由謂詞演算的公理系統推出.

(B) 如果是第二情形,則所說的公式不是永眞公式,因爲可以給出一些以自然數爲個體域的謂詞,把它們代入該公式的謂詞變元處後,得出一個假命題.

由這兩句尙待證明的定理,我們先作出下列的推論:

謂詞演算的每一個永眞公式亦是可推出的,即由我們的基本公式 a) 至 f),規則 α1) 至 α3),β),γ),δ) 所組成的公理系統具有完備性.

如果一公式在自然數的個體域內(或隨便另外一個可數無窮個體域內)是普遍有效的,即如果把其中的謂詞變元隨便代以個別的數論謂詞,又把其中的自由客體變元代以確定的數目時,它永遠變成一個眞命題,那末這公式在隨便一個個體域內亦是普遍有效的,即它是一個永眞公式.

後面這個重要定理(在這裏是當作推論而得出的)可以更簡單地另行證明,它是由累文漢首先證明的[1].

現在我們對斷言(A)及(B)加以證明. 先證(A)的眞確性. 假設對於某一個 n, $\mathfrak{E}_n$ 是一個眞的命題公式. 因爲 $\mathfrak{C}_n$ 是由 $\mathfrak{E}_n$ 使用規則 α1) 作代入而得,而 $\mathfrak{D}_n$ 是由 $\mathfrak{C}_n$ 使用規則 γ) 而得,所以我們只須證明,對於每個 n,以下公式

$$\mathfrak{D}_n\rightarrow(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$$

---

1) Löwenheim, L.: Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Ann., Bd. 76 (1915). 在本章 §8 結束處所引的 Skolem 的著作中把這定理的證明作了本質的簡化.

都是謂詞演算中的一個可推出的公式（那末便可以推出上述的斯科林範式了——譯者）．我們的證明是對 n 作歸納．$\mathfrak{D}_1$ 具有以下形式：

$$(x_0)(x_1)\cdots(x_l)\mathfrak{A}(x_0,\cdots,x_0;x_1,\cdots,x_l).$$

若多次使用公理 f) 與規則 V 我們可以推出以下公式

$$(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(z_1,\cdots,z_k;y_1,\cdots,y_l)\rightarrow$$
$$\rightarrow(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l).$$

由它再作代入便得

$$(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(z_0,\cdots,z_0;y_1,\cdots,y_l)\rightarrow$$
$$\rightarrow(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l).\quad(甲)$$

又若多次使用公理 e) 及規則 V（譯者按，由公理 e) 及規則 δ) 直接可得)，我們可以推出以下公式

$$\mathfrak{D}_1\rightarrow(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(z_0,\cdots,z_0;y_1,\cdots,y_l).\quad(乙)$$

由(甲)(乙)再用規則 V 可得

$$\mathfrak{D}_1\rightarrow(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l).$$

[故本斷言當 $n=1$ 時已成立——譯者]．若把 $\mathfrak{C}_n$ 中所有的 x_i 都換爲 z_i，所得的公式暫記爲 $\mathfrak{C}'_n$．$\mathfrak{C}'_n$ 具有形式

$$\mathfrak{C}'_{n-1}\vee\mathfrak{A}(z_{n1},\cdots,z_{nk};z_{(n-1)l+1},\cdots,z_{nl}).$$

由命題演算中一個永眞公式[譯者按，卽 $(C\rightarrow A\vee B)\rightarrow(C\&\overline{A}\rightarrow B)$] 作代入，可得公式

$$\mathfrak{C}'_n\ \&\ \overline{\mathfrak{C}'_{n-1}}\rightarrow\mathfrak{A}(z_{n_1},\cdots,z_{n_k};z_{(n-1)l+1},\cdots,z_{nl}).$$

經過多次使用公理 e) 及規則 V 後可以證明 $\mathfrak{D}_n\rightarrow\mathfrak{C}'_n$．因此我們又得

$$\mathfrak{D}_n\ \&\ \overline{\mathfrak{C}'_{n-1}}\rightarrow\mathfrak{A}(z_{n_1},\cdots,z_{n_k};z_{(n-1)l+1},\cdots,z_{nl}).$$

再經過多次使用規則 $\gamma 1$) 及 δ' 又得

$$\mathfrak{D}_n\ \&\ \overline{\mathfrak{C}'_{n-1}}\rightarrow(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(z_{n_1},\cdots,z_{n_k};y_1,\cdots,y_l).$$

經過重複使用公理 f) 與規則 V 可以證明

$$(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(z_{n_1},\cdots,z_{n_k};y_1,\cdots,y_l)\rightarrow$$
$$\rightarrow(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l).$$

由最後這兩公式應用規則 V 可得

$$\mathfrak{D}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{C}'_{n-1}} \rightarrow (Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l).$$

因為 $(A \,\&\, \bar{B} \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \vee C)$ 是命題演算中的一個永眞公式，因此由最後一個公式可得

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow \mathfrak{C}'_{n-1} \vee \mathfrak{F},$$

這裏為簡便起見，以 $\mathfrak{F}$ 表示

$$(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l).$$

再經過多次混合應用規則 $\gamma 1$) 與 δ) 以及公式 $(x)(F(x) \vee A) \rightarrow \rightarrow (x)F(x) \vee A$，我們便可由上公式得出 $\mathfrak{D}_n \rightarrow \mathfrak{D}_{n-1} \vee \mathfrak{F}$. 我們本來曾假設（按卽歸納假設），已經證明了 $\mathfrak{D}_{n-1} \rightarrow \mathfrak{F}$ 的，那末依照命題演算便由最後這兩公式推出 $\mathfrak{D}_n \rightarrow \mathfrak{F}$ 來．這樣我們的歸納證明便完成了．

現在再證明(B)．假設 $\mathfrak{E}_n$ 中沒有一個是命題演算中的永眞公式．為了使下文能够適用起見，我們還要對命題公式 $\mathfrak{E}_n$ 給出一個頗為特殊的形狀． $\mathfrak{E}_n$ 本是由 $\mathfrak{C}_n$ 依下法而得出的，卽把 $\mathfrak{C}_n$ 中出現的基本成分，只要它們是一些謂詞變元，其變目在系列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 之中，便換為命題變元．我們今約定，這個命題變元的替換須如下地作出，卽 $F(x_0)$ 換以命題變元 F_0; $F(x_1)$ 換以 F_1; $G(x_1, x_2, x_3)$ 換以 $G_{1,2,3}$ 等等．每一個公式 $\mathfrak{E}_{n+1}$ 中，除恆有 $\mathfrak{E}_n$ 中所有的命題變元外，還有其它新命題變元．我們設想在所有 $\mathfrak{E}_n$ 中出現的命題變元都依照某種方式加以計數，因而可以說到第一個命題變元，第二個命題變元等等． 這種計數法並須如下實行，首先按某種方式計數 $\mathfrak{E}_1$ 中的命題變元，其次計數 $\mathfrak{E}_2$ 中新出現的命題變元等等．

因為沒有一個 $\mathfrak{E}_n$ 是命題演算的永眞公式，因此在每一個 $\mathfrak{E}_n$ 中出現的命題變元恆可這樣地代以眞假值，"眞"或"假"，使得 $\mathfrak{E}_n$ 變成一個假命題． 依照前面在命題演算處的用語，我們說這些眞假值是 $\overline{\mathfrak{E}_n}$ 的一個滿足系．對於每個 $\overline{\mathfrak{E}_n}$ 當然只有有限個不同的滿足系，但整個說來却是無窮多個，因為相應於不同足碼的公式 $\overline{\mathfrak{E}_n}$，

其滿足系當然是不同的.

對於這些無窮多個命題變元中的每一個，我們都唯一地對應以"眞"或"假"值. 如果第一個命題變元在無窮多個滿足系中都被"眞"值所代入，我們便把它對應於"眞"值，否則便對應於假值. 其後，我們只考慮那些滿足系，其中第一命題變元是代入以它所對應的值的. 這時如果第二命題變元出現無窮多次"眞"值，那末它便對應於"眞"值，否則便對應於"假"值. 同樣，當確定後一個命題變元所對應之值時，我們經常只考慮那些滿足系，其中前一個命題變元取得它所對應的值.

現在，若把命題變元代入以它所對應的值，那末全體 $\mathfrak{C}_n$ 均變成假命題[1]. 現在我們定義一些數論謂詞，它們就是將來用以代入 $\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$ 中的謂詞變元處的. 例如，設 $\mathfrak{A}$ 中出現有一個三項謂詞變元 $F(\ ,\ ,\ )$，那末在 $\mathfrak{C}_n$ 中便出現有命題變元 F_{i_1,i_2,i_3}. 我們今如下地定義所對應的數論謂詞 Φ，即對於任何自然數，$\Phi(p,q,r)$ 所取得的眞假值永遠是 $F_{p,q,r}$ 所對應的值. 因此每一個謂詞變元都和一個具有同樣空位的數論謂詞相對應. 現在，若在公式

$$(Ex_1)\cdots(Ex_k)(y_1)\cdots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$$

中，把自然數作爲個體域，而把其中的謂詞變元代入以剛剛定義的數論謂詞，那末我們便容易看出，這樣代入後，這公式變成一個假命題，亦即公式

$$(x_1)\cdots(x_k)(Ey_1)\cdots(Ey_l)\overline{\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)}$$

變成一個眞命題. 因爲，試取第 n 個 k-組自然數，即上文記爲 $(n_1,\cdots,n_k)$ 的，那末把謂詞變元作代入後，

$$\overline{\mathfrak{A}}(n_1,\cdots,n_k;(n-1)l+1,\cdots,nl)$$

的眞假值恰巧和對命題變元作相應的眞假值的代入後 $\mathfrak{C}_n$ 的最末

---

1) 注意 $\mathfrak{C}_n$ 實即 $\mathfrak{C}_{n-1}\vee\mathfrak{B}_n$，故凡使 $\mathfrak{C}_n$ 爲假的代入，亦必使 $\mathfrak{C}_{n-1}$ 爲假，對 $\mathfrak{C}_n$ 仿此——譯者註.

一個析取項所取的眞假值相反(注意:該析取項取假值——譯者),故爲眞值. 因爲這點對每一個 k-組都眞,故

$$(x_1)\cdots(x_k)(Ey_1)\cdots(Ey_l)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_k;y_1\cdots,y_l)$$

對於所給的個體域是眞的. 因此(B)便證明了.

§11. 由給定的前提所導出的推論;與永眞公式的關係

上面我們對謂詞演算只用以推出永眞公式. 我們的推理的前提,即基本公式 a) 至 f),本身便是具有純邏輯性質的. 現在我們想用一些例子來說明謂詞演算中的一般形式證明方法,在建立我們的公理以前,這種方法是無法詳細討論的. 我們要討論的是:如何由一些任意的前提,不必具有純邏輯性質的,導出一些推論.

在这些前提中,不但有各種變元,而且還有個別的謂詞及個別的客體. 作爲個別的謂詞的記號,我們或者用大寫希臘字母或者用大寫拉丁字母後面跟以小寫拉丁字母所組成的組合,如 St, Ms, Dsc 等,對數學謂詞言,則用數學上所熟知的謂詞記號如 $<, >, =$ 等等. 在 §4 中所引入的公式這個概念須作相應的推廣.

所謂形式證明就是:把推理的假設用符號寫下,並當作基本公式(公理)加到邏輯基本公式 a) 到 f) 去,它們一起組成開始公式,對它們便根據推理規則 α), β), γ), δ) 而作出純粹形式運算. 推理規則 α2) 須加推廣,使得自由客體變元可以被個別客體的記號所代入.

在公式的內容意義方面我們須注意,客體變元一般地不再聯系於任何一個仍未確定的個體域;無寧說是,我們須依照假定的性質而更精確地規定:到底它是由整數組成,抑或是由實數或平面上的點或由其它的什麽東西所組成的. 又可能出現有多個個體域,如後面的第二個例子那樣. 這時我們需要用到多種類的個體變元. 謂詞變元亦須按照它們變目的種類而作區別. 公理 e) 與 f) 須就所出現的客體種類而每種各寫一次. 謂詞演算因而便變得複

雜了,但這種複雜性是可以免除的,因爲正如我們後面討論第二個例子時指出的那樣,永遠可以把多個個體域的情形歸結到具有唯一的一個個體域的情形.

首先,我們給出一些簡單的例子.

作爲第一例子是以單稱判斷作爲前提的一個三段論,這類的三段論是教科書上熟知的例子:

"所有人都是要死的,嘉尤斯是人,所以嘉尤斯是要死的".

在這命題中出現三個個別記號."人"與"要死的"相應於兩個謂詞 $Ms(x)$ 與 $St(x)$. 它們共同所屬的客體類可以算是生物. 第三個個別記號是固有名詞嘉尤斯. 兩個前提寫成公式時便是:

$$(x)(Ms(x)\rightarrow St(x)),$$

$$Ms(\text{嘉尤斯}).$$

若對公式

$$(x)F(x)\rightarrow F(y)$$

作代入,我們可得

$$(x)(Ms(x)\rightarrow St(x))\rightarrow(Ms(y)\rightarrow St(y)),$$

其次再得

$$(x)(Ms(x)\rightarrow St(x))\rightarrow(Ms(\text{嘉尤斯})\rightarrow St(\text{嘉尤斯})),$$

$$Ms(\text{嘉尤斯})\rightarrow St(\text{嘉尤斯})\quad[\text{用規則}\ \beta)],$$

$$St(\text{嘉尤斯})\quad[\text{用規則}\ \beta)].$$

最後一公式便是我們的結論句"嘉尤斯是要死的"的符號表示.

我們再給出兩個數學推論的例子. 首先,我們討論下列的幾何推理:

前提: 經過兩個不同的點至多有一直綫.

斷言: 兩個不同的直綫至多有一公共點.

這裏所出現的謂詞如下:首先是關係 $\Lambda(x,y)$:"x 在 y 上". 它的第一空位專指點而第二空位則專指直綫. 其次出現有相異性謂詞,它是恆等性謂詞 $\equiv(x,y)$ 的否定. 這謂詞的空位既可指點也

可指直綫，當然，說一點與一直綫相恆等的斷言永遠是當作假的．爲了淸楚起見，我們把專指點的變目用小寫拉丁字母表示，而專指直綫的變目則以大寫拉丁字母表示[1]． 個體固有名詞這裏並不出現．前提可用符號表示爲：

$$(x)(y)\{\overline{\equiv}(x,y)\rightarrow\overline{(EG)}(EH)[\overline{\equiv}(G,H)\ \&\ A(x,G)\ \&\ A(x,H)\ \&\ A(y,G)\ \&\ A(y,H)]\}.$$

斷言句則可表示爲：

$$(G)(H)\{\overline{\equiv}(G,H)\rightarrow\overline{(Ex)}(Ey)[\overline{\equiv}(x,y)\ \&\ A(x,G)\ \&\ A(x,H)\ \&\ A(y,G)\ \&\ A(y,H)]\}.$$

爲簡短起見，我們把

$A(x,G)\ \&\ A(y,G)\ \&\ A(x,H)\ \&\ A(y,H)$ 寫爲 $\mathfrak{A}(x,y,G,H)$．

再利用記號→的定義，我們便可把前提句與斷言句寫成下列的表示式：

$$(x)(y)\{\equiv(x,y)\vee\overline{(EG)}(EH)[\overline{\equiv}(G,H)\ \&\ \mathfrak{A}(x,y,G,H)]\}$$

及

$$(G)(H)\{\equiv(x,y)\vee\overline{(Ex)}(Ey)[\overline{\equiv}(x,y)\ \&\ \mathfrak{A}(x,y,G,H)]\}.$$

根據 §8 所敍述的一個表達式的否定的作成規則，我們可把這兩表達式變形爲

$$(x)(y)\{\equiv(x,y)\vee(G)(H)[\equiv(G,H)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H)]\},$$

$$(G)(H)\{\equiv(G,H)\vee(x)(y)[\equiv(x,y)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H)]\}.$$

若把這兩表達式變成範式，便得

$$(x)(y)(G)(H)\{\equiv(x,y)\vee(\equiv(G,H)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H))\},$$

$$(G)(H)(x)(y)\{\equiv(G,H)\vee(\equiv(x,y)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H))\}.$$

由這兩個表達式我們立即可以推知：斷言是可以由前提推出的．因爲，如果對其中的析取式應用結合律與可換律，對其中的全稱號應用交換規則，那末前提句公式便變成斷言句公式． 同時我

1) 這裏不要與命題變元相混．

們亦看見，反之，由斷言句的眞確性亦可以推出前提句的眞確性.

兩個個體域的同時出現可用下列方法加以免除，這方法可以適用於一般情形，那是不用特別細說的. 我們可建基於唯一的一個個體域，由點與直綫組成的，並引入兩個個別謂詞 $\Pi(x)$，卽 x 是一點；及 $\Gamma(x)$，卽 x 是一直綫. 就我們的例子言，前提句可以寫成

$$(x)(y)\{\Pi(x) \,\&\, \Pi(y) \,\&\, \overline{\equiv}(x,y) \rightarrow \overline{(Ez)}(Eu)[\Gamma(z) \,\&\, \Gamma(u) \,\&$$
$$\& \,\overline{\equiv}(z,u) \,\&\, \Lambda(x,z) \,\&\, \Lambda(x,u) \,\&\, \Lambda(y,z) \,\&\, \Lambda(y,u)]\}.$$

斷言句亦可同樣表達.

數學推理的第二個例子是：我們想證明**大小關係的可傳性**. 這個定理，它可表成以下公式

$$<(x,y) \,\&\, <(y,z) \rightarrow <(x,z),$$

這本是我們早已熟知的，但這裏我們却想在度量論的意義上來討論. 我們設想謂詞 $<(x,y)$ 中的空位乃專指一些確定的量的（例如綫段長度或正測度），並把這謂詞從量的加法而導出. 我們引入記號 $\Phi(x,y,z)$，表示三項謂詞"x 增加 y 後便得 z"（或者算術地寫爲"$x+y=z$"）. 借助於這個謂詞可把 $<(x,y)$ 定義爲

$$(Eu)\Phi(x,u,y)$$

（"有一個 u 把它加到 x 後可得 y"）.

如果把這定義代入我們的斷言內，它便變成下列形狀：

$$[(Eu)\Phi(x,u,y) \,\&\, (Eu)\Phi(y,u,z)] \rightarrow (Eu)\Phi(x,u,z).$$

如果量的加法適合下列兩個假設，那末我們所討論的定理便可以證明了：

1. "兩個量恆可相加"，卽

$$(Ez)\Phi(x,y,z).$$

2. "對於量的加法結合律成立：

$$x+(y+z)=(x+y)+z",$$

卽

$$[\Phi(x,y,u) \,\&\, \Phi(y,z,v) \,\&\, \Phi(u,z,w)] \rightarrow \Phi(x,v,w).$$

這兩個假設都已表成範式,不過却含有自由變元. 如果我們把斷言也表成範式,它便變成以下形式:

$$(u)(v)(Ew)(\overline{\Phi}(x,u,y) \vee \overline{\Phi}(y,v,z) \vee \Phi(x,w,z)).$$

亦可寫成

$$(u)(v)(Ew)(\Phi(x,u,y) \mathbin{\&} \Phi(y,v,z) \rightarrow \Phi(x,w,z)).$$

這個公式可依照下列方式而由我們的假設推出.

若把變元改名,可由上述兩個假設得到:

1. $(Ew)\Phi(u,v,w)$

2. $(\Phi(x,u,y) \mathbin{\&} \Phi(u,v,w) \mathbin{\&} \Phi(y,v,z)) \rightarrow \Phi(x,w,z)$.

若對第二假設實行 35 頁的規則 VII,它便變成

$$\Phi(u,v,w) \rightarrow [(\Phi(x,u,y) \mathbin{\&} \Phi(y,v,z)) \rightarrow \Phi(x,w,z)].$$

應用相應於公式(34)的規則由它可推得

$$(Ew)\Phi(u,v,w) \rightarrow (Ew)[\Phi(x,u,y) \mathbin{\&} \Phi(y,v,z)) \rightarrow \Phi(x,w,z)].$$

因爲現在已經假設 $(Ew)\Phi(u,v,w)$ 爲眞,從此又得

$$(Ew)(\Phi(x,u,y) \mathbin{\&} \Phi(y,v,z) \rightarrow \Phi(x,w,z)).$$

如果再用規則 γ' 把全稱號 (u),(v) 加在前面,我們便得到所求的斷言了.

這一段內所說的由不具有邏輯永眞性的前提,而作形式證明的方法有其主要的應用,例如如果要對隨便一個科學領域找出其基本命題或公理,並由它們而把其餘的命題作爲推論而導出時.我們甚至可以說,公理系統這個概念只有在現在這個時候才算得到嚴格的精確處理;因爲所謂完全公理化不但要建立公理,而且還要給出一些邏輯工具,以使由公理至新定理的證明成爲可能. 至於下列這個問題,內容上說應該是公理的推論的那些定理,是不是全都可以用形式推理方法而由公理推出,我們將在本段之末加以討論.

凡能夠在狹義演算範圍之內表述的公理系統,可以分成兩類.其公理中不含有謂詞變元而只有個別的謂詞的(所謂公理,這裏以

及今後，都只指用以刻劃所討論的領域的那些開始公式，並不指§5中所述的邏輯基本公式，那是任何公理系統所必有的)，叫做第一層次的公理系統．如果在公理中還出現有命題變元，我們便說它是第二層次的公理系統．唯一的例外是關於恆等性公理．如果我們把恆等性這個謂詞仍用記號≡表示，那末這公理便具以下形式

$$\equiv(x,x),$$
$$\equiv(x,y)\rightarrow(F(x)\rightarrow F(y))$$

(在兼顧到內容的那種公理化中，这些公理幾乎是删除的，因為它具有純邏輯的性質．參見第4章§1)．這裏在第二個公理中出現有謂詞變元．儘管這樣，如果一公理系統中，只在恆等性公理處才出現有謂詞變元，我們仍算它是第一層次的．其理由在於，第二個恆等性公理，每當它在該公理系統內使用時，永遠可以用沒有謂詞變元的公理來代替．事實上，這個公理可用下列公理代替，(即根據規則 $\alpha3$) 而把 F 代以在該公理系統內出現的個別謂詞後所得的公理，以及表示恆等性謂詞的對稱性及可傳性的公理．例如，設該公理系統內只有個別謂詞 $\Phi(\ )$ 及 $\Psi(,)$，那末恆等性公理可代以

$$\equiv(x,x),$$
$$\equiv(x,y)\rightarrow\equiv(y,x),$$
$$(\equiv(x,y)\,\&\equiv(y,z))\rightarrow\equiv(x,z),$$
$$\equiv(x,y)\rightarrow(\Phi(x)\rightarrow\Phi(y)),$$
$$\equiv(x,y)\rightarrow(\Psi(x,z)\rightarrow\Psi(y,z)),$$
$$\equiv(x,y)\rightarrow(\Psi(z,x)\rightarrow\Psi(z,y)),$$

其餘情形準此．這種可代替性的嚴格證明這裏省略了．

屬於第二層次的公理有皮亞諾的自然數公理系統，因為表達完全歸納法公理時，使用一個謂詞變元是必要的．其次有蔡梅羅(Zermelo)原來形式的集論公理系統，因為在分離公理(Axiom der Aussonderung)中出現了謂詞變元．如果我們把其中的連續性公理

除去的話，屬於第一層次公理系統的有希爾柏脫的幾何公理系統，此外還有羣論的公理.

下列的問題是一個根本的問題：在一個科學領域內任給一個確定的命題，是否可以決定它是一些公理的推論或否.

我們將證明，這個問題可以化歸爲純謂詞演算的問題，即 §5 所建立的只含謂詞變元及個體變元的演算中的問題. 因爲，一命題能否在一公理系統中邏輯地推出的問題可化歸爲純謂詞演算中某一個公式是否永眞的問題. 不過這只當該系統是第一層次的才成. 我們想把這斷言的證明用一個確定的例子來說明.

在探究幾何的各個公理羣之間的邏輯隸屬關係時，有一個特別重要而且有趣的結果，即特殊帕斯加定理(Pascalsche Satz)(它在不用連續性公理而建立比例論的過程中起着重要的作用) 不可能只由結合公理、次序公理及平行公理而推出. 現在所想證明的是：帕斯加定理對於所說的公理系統的不隸屬性是和純謂詞演算中某一個公式的不可推出性是等價的.

首先，我們要把所討論的公理以及特殊帕斯加定理在我們的演算中作出表示，而且只用一種個體域. 要避免多個個體域，這裏我們不用上面提到的一般方法，而用另一個特別適用於我們的例子的方法. 我們只須不引入點與直綫間的基本關係("點 x 在直綫 y 上"或"點 x,y 確定直綫 z")而引入三點間的關係 $Ger(x,y,z)$ ("x,y 與 z 在一直綫上"). 同樣我們不用點與平面間的基本關係而用四點間的關係 $Eb(x,y,z,u)$ ("x,y,z 與 u 在一平面上").

除這兩謂詞外還須加入恆等性關係 $\equiv(x,y)$ 以及"介於"關係 $Zw(x,y,z)$ ("x 介於 y 與 z 之間").

借助於所引入的這四個關係可把所有出現於我們問題中的公理以及帕斯加定理都表成邏輯公式. 重要的一點是，在这些公式中我們用放全稱號於前面的方法而避免自由客體變元，例如，以下公理"通過兩點只有一條直綫"可表示爲以下公式

$$(x)(y)(u)(v)\{[Ger(x,y,u)\ \&\ Ger(x,y,v)\ \&\ \overline{\equiv}(x,y)\ \&$$
$$\&\ \overline{\equiv}(u,v)]\rightarrow Ger(x,u,v)\},$$

讀爲:“如果 x,y 與 u 在一直綫上, x,y 與 v 在一直綫上,並且 x 異於 y, u 異於 v, 那末 x,u 與 v 亦在一直綫上”. 公理:“如果兩平面有一個公共點,那末它們至少還有另一公共點”可表示爲以下公式

$$(x)(y)(z)(u)(v)(w)(p)\{[Eb(x,y,z,p)\ \&\ Eb(u,v,w,p)]\rightarrow$$
$$\rightarrow(Eq)(\overline{\equiv}(p,q)\ \&\ Eb(x,y,z,q)\ \&\ Eb(u,v,w,q))\}.$$

對平面上的次序說來很爲重要的公理:“如果一三角形所在的平面上有一直綫與這三角形的一邊相交, 那末它亦與這三角形的另一邊相交”,這相應於下列的公式:

$$(x)(y)(z)(u)(v)\{[Eb(x,y,z,u)\ \&\ \overline{Ger}(x,y,z)\ \&$$
$$\&\ Zw(v,x,y)\ \&\ \overline{Ger}(x,y,u)\ \&\ \overline{Ger}(z,u,v)]\rightarrow$$
$$\rightarrow(Ew)[Ger(u,v,w)\ \&\ (Zw(w,x,z)\vee Zw(w,y,z))]\}.$$

引入關係 Ger 與 Eb 時必須注意把它們的對稱性當作公理而表達出來. 因此我們必須建立公式

$$(x)(y)(z)\{Ger(x,y,z)\rightarrow(Ger(x,z,y)\ \&\ Ger(y,x,z))\},$$

以及關於 Eb 的相應公式. **恆等性關係的性質**同樣亦須當作公理而表述:

$$(x)(y)(\equiv(x,y)\rightarrow\equiv(y,x)),$$
$$(x)\equiv(x,x),$$
$$(x)(y)(z)\{\equiv(x,z)\ \&\equiv(y,z)\rightarrow\equiv(x,y)\},$$
$$(x)(y)(z)(u)\{(\equiv(x,u)\ \&\ Ger(x,y,z))\rightarrow Ger(u,y,z)\},$$
$$(x)(y)(z)(u)(v)\{(\equiv(x,v)\ \&\ Eb(x,y,z,u))\rightarrow Eb(v,y,z,u)\},$$
$$(x)(y)(z)(u)\{(\equiv(x,y)\ \&\ Zw(x,u,z))\rightarrow Zw(y,u,z)\},$$
$$(x)(y)(z)(u)\{(\equiv(x,y)\ \&\ Zw(u,x,z))\rightarrow Zw(u,y,z)\}.$$

後面四個公理乃表示,在我們所討論的各關係中,恆等的事物可以彼此替換.

現在我們設想把一切寫成公式的公理用記號 & 連成一個公

式．它表示諸謂詞"≡"，"Ger"，"Zw"，"Eb"所應滿足的一切條件，或者照公理法的說法，它包含了这些謂詞的隱定義．爲簡短起見，我們把這個公式寫爲

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb).$$

依照通常的表達方式，特殊帕斯加定理爲：設 ABC 與 $A'B'C'$ 分別在相交的兩條直綫上，各點均與兩綫的交點相異．那末，如果 BC' 平行於 CB'，CA' 平行於 AC'，則 AB' 亦平行於 BA'． 這個定理又可表成一個邏輯公式，其中只出現謂詞"≡"與"Ger"．我們把這個公式表爲 $\mathfrak{P}(\equiv, Ger)$．

上面所說的斷言是，由

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb)$$

不能證明

$$\mathfrak{P}(\equiv, Ger).$$

在這個斷言內，≡，Ger，Zw，Eb 的幾何意義不再出現．因爲根據公理法觀點，由幾何公理而證明一個定理時，除了公理所明白表述的以外，不准使用所引入的基本關係的任何性質．

因此我們可以把这些謂詞完全删除而代以四個謂詞變元——當然具有相同的變目：

$$F(x,y);\ G(x,y,z);\ H(x,y,z);\ K(x,y,z,u).$$

帕斯加定理的可證性等於說，對於隨意四個這樣的謂詞 F,G,H,K：如果它們使得

$$\mathfrak{A}(F,G,H,K)$$

爲眞，則 $\mathfrak{P}(F,G)$ 亦眞，因而

$$\mathfrak{A}(F,G,H,K) \rightarrow \mathfrak{P}(F,G)$$

是一個永眞公式．因此，問題在於證明，上式並非永眞．

同樣地，對於每一個其它的幾何命題我們都可以給出一個相應的謂詞演算的公式，使得這個命題爲幾何公理的推論當且僅當這個邏輯公式爲永眞時． 同樣地，不矛盾性問題亦與某一個公式

的永眞性有關．例如，由公式

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb)$$

所組成的幾何公理有沒有邏輯矛盾的問題，等價於以下公式

$$\overline{\mathfrak{A}}(F, G, H, K)$$

是否一個永眞公式的問題．

我們還可以說，第一層次的公理系統的每一個推論都可以借助於本段開首所表示的形式推理過程而得到．因爲表示這命題能夠由公理推出的那個公式是一個永眞公式，依照 §10 它是可證的．把這個公式中的謂詞變元代以特殊的謂詞後，由蘊涵規則便得到該命題本身了．

如上面所說，我們這裏所作的注意，即一命題能夠由某一公理系統推出這點與謂詞演算中某一公式的普遍有效性相等價，這只對第一層次公理系統而言．就第二層次公理系統來說，亦有相似的關係．不過相應的永眞公式却不再能夠在狹義謂詞演算中表示，它是屬於第 4 章所討論的廣義謂詞演算的．

§12. 判定問題

由前一段的討論可以看出下列問題的根本重要性：對於一個已給的謂詞演算的公式，辨明它到底是一個永眞公式或否．根據 §5 所作的定義，一公式的永眞性意指這公式對於每個個體域的普遍有效性．因此我們亦把它稱做一公式的普遍有效性問題．若更準確些，應該說對每個個體域的普遍有效性問題．根據 §10 的討論，謂詞演算中的永眞公式就是由 §5 的公理系統所能推出的公式．但這個事實對於普遍有效性問題的解決並沒有幫助，因爲我們並沒有一個普遍的審定法來決定一公式是否可以導出．

設有一個純粹謂詞演算的公式，卽其中不含有個別的記號，如果我們把其中的命題變元代以"眞"或"假"，把其中的謂詞變元代以某一個個體域內所定義的特殊謂詞，又把其中的自由客體變元

代以個別的客體，這樣可使得它變成眞命題，則我們說這公式在該個體域內是可滿足的．如果我們只說一公式是可滿足的而不更詳細地指出那一域，便意指有一個個體域在其中它被滿足．如果一公式 $\mathfrak{A}$ 在某一個個體域內不是普遍有效是，那末顯然 $\overline{\mathfrak{A}}$ 在該域內是可滿足的，反之亦然．因此一公式 $\mathfrak{A}$ 的普遍有效性與 $\overline{\mathfrak{A}}$ 的可滿足性直截地爲正與反的關係．

對這兩個彼此等價的問題，普遍有效性與可滿足性，我們常用一個公共名稱，叫做狹義謂詞演算中的判定問題．根據 §11 所作的注意，我們有理由把它當作數理邏輯的主要問題看待．

我們今把普遍有效性與可滿足性的概念用一些例子加以說明．凡能夠由邏輯公理推出的一切公式，例如 §6 的公式 (21) 至 (36) 都是普遍有效的．普遍有效的公式當然亦是可滿足的．公式

$$(Ex)F(x)$$

不是普遍有效的，但是可滿足的．我們只須隨意挑選一個個體域而 F 則選取謂詞"與自己恆等"便成了．這謂詞不但對一個而且對所有客體都成立．因此又得：公式

$$(x)F(x)$$

亦是可滿足的．其次

$$(x)\overline{F}(x,x) \mathbin{\&} (x)(Ey)F(x,y)$$

是可滿足的，我們只須取整數作爲個體域而對 $F(x,y)$ 則代以謂詞 $x<y$ 便成．但是，例如

$$(Ex)(y)(F(x,x) \mathbin{\&} \overline{F}(x,y))$$

却是不可滿足的，因爲這公式的否定

$$(x)(Ey)(\overline{F}(x,x) \vee F(x,y))$$

是一個永眞公式．事實上，對於每個 x 都存在有所要求的 y，因爲我們可取 y 等於 x．

判定問題還可有更強的形式．一個公式卽使是可滿足的，並

不因而便對每一個個體域都滿足. 例如,公式

$$(Ex)(Ey)(F(x)\,\&\,\bar{F}(y))$$

當然是可滿足的. 我們只須取由 0 與 1 所組成的域作爲個體域,而作爲 F 則取謂詞 "$x=0$". 這時有一個 x 與一個 y 使 $x=0$ 與 $y\neq 0$, 卽 0 與 1. 但這個公式在只由一個元素所組成的域內是不可滿足的, 因爲一個謂詞不能對同一客體旣成立又不成立. 同樣地對以上公式的否定言

$$(x)(y)(\bar{F}(x)\vee F(y)),$$

如果個體域內只有一個客體,它是普遍有效的,否則不然.

如果一公式在某一個體域內是可滿足的或普遍有效的, 那末對每一個具有同樣基數的個體域來說它亦如此, 這利用兩域的彼此一一對應性卽容易證明. 如果一公式旣不是對每個個體域都普遍有效(可滿足), 又不是對任何域都不普遍有效(可滿足), 那末, **假設該邏輯公式的普遍有效性或可滿足性便等價於給出一個有關於個體個數的命題**. 要解決最廣泛意義下的判定問題,須找出一個程序,使得對於每一個已給的公式都能夠判定,**在哪些個體域內它是普遍有效的或可滿足的,而在哪些個體域內則否**.

關於兩個形式的判定問題間的關係, 在 §10 處已經有一個値得注意的定理.

如果一個公式在一個可數的無窮域內普遍有效, 那末它便是普遍有效的,因而是永眞公式.

若用可滿足性的用語,這定理便是:

如果一個公式是可滿足的, 那末在一個可數的無窮域內它也可滿足.

作爲這個定理的推廣(當然是很顯明的)我們還有:

如果一個公式在某一個個體域內是可滿足的, 那末在更多個體的每一個體域內它亦可滿足.

因爲, 設一公式在一域(J)內被一些謂詞滿足, 我們很容易把

这些謂詞的定義推廣到更廣的域(J')（即它以(J)爲其部分域的），使得該公式仍被滿足．爲了這個目的，我們在(J)內隨便取出一個元素α，並依照下法把謂詞推廣至域(J')內：把屬於(J')內而不屬於(J)內的元素都當作等於α．例如，設在域(J)內有一個可滿足的n項謂詞Φ，那末在(J')內相應的謂詞Ψ便可如下定義：對於(J')內所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$，均有

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \sim \Phi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n),$$

其中，如果x_i屬於(J)，則ξ_i與x_i同，否則ξ_i爲α．根據這謂詞的定義可推得它在域(J')內的可滿足性，但這裏我們不再詳細推演了．

如果個體域具有有限個個體，那末普遍有效性與可滿足性永遠是可判定的．

因爲，這時全稱號可代以有限項的合取，存在號可代以有限項的析取，因而在有窮域內的普遍有效性或可滿足性，便可歸結爲命題演算公式的普遍有效性及可滿足性．

可用一個例子釋明．試探究以下公式

$$(Ex)(y)(F(x,x) \& \bar{F}(x,y))$$

在具有兩個元素域內的可滿足性．設把這域內的兩元素記爲 0 與 1，那末對於這域，每個公式$(Ex)\mathfrak{A}(x)$與$\mathfrak{A}(0) \vee \mathfrak{A}(1)$意義相同，每個公式$(x)\mathfrak{A}(x)$與$\mathfrak{A}(0) \& \mathfrak{A}(1)$意義相同．因此上面公式可換爲

$$(y)(F(0,0) \& \bar{F}(0,y)) \vee (y)(F(1,1) \& \bar{F}(1,y)),$$

再換爲

$$(F(0,0) \& \bar{F}(0,0) \& F(0,0) \& \bar{F}(0,1)) \vee (F(1,1) \& \bar{F}(1,0) \& F(1,1) \& \bar{F}(1,1)).$$

因此問題在於，能否把$F(0,0)$，$F(0,1)$等代以眞或假命題而使得整個公式獲得“眞”值．換句話說，在具有兩元素的域內這公式的可滿足性便歸結爲命題公式

$$(A \& \bar{A} \& A \& \bar{B}) \vee (C \& \bar{D} \& C \& \bar{C})$$

的可滿足性.

由最後的定理可得：對於一個已給的公式如果我們能夠證明，它具有可滿足性當且僅當它在具有 k 個(有限數)個體的域內爲可滿足，那末，它對於一切個體域的可滿足性問題便可以判定了.

因爲，首先可以決定，它是否在 k 個個體域內爲可滿足的. 如果不可滿足，那末這個公式在任何一個域內都不可滿足. 如果在這域內它可滿足，那末在具有更多個體的域內它也可滿足. 然後我們只須探究它在具有 $1, 2, \cdots, k-1$ 個元素的域內的可滿足性，而這也是可判定的.

還須注意，我們並不能夠從這方法而得到判定問題的一般解決. 因爲，我們有一些公式，它們在任何有限個個體域內不可滿足，但在具無窮多個元素的域內却可滿足. 屬於这種公式的可舉下例：

$$(x)(Ey)F(x,y)\,\&\,(x)\bar{F}(x,x)\,\&\,(x)(y)(z)((F(x,y)\,\&\,F(y,z))\rightarrow F(x,z)).$$

在自然數域內這個公式被謂詞 $x<y$ 所滿足. 但若說它在具有有限個個體的域內也可滿足，那將立刻得到一個矛盾. 設 Φ 爲滿足謂詞. 由於 $(x)(Ey)\Phi(x,y)$ 的眞確性，將有一個任意伸長的元素鏈 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 使得永遠有 $\Phi(a_i, a_{i+1})$. 由於假設個體域的有窮性，將有一 i 與 $k(k>i)$ 使得 a_i 與 a_k 表示同一元素. 由於

$$(x)(y)(z)((\Phi(x,y)\,\&\,\Phi(y,z))\rightarrow\Phi(x,z))$$

我們將得 $\Phi(a_i, a_i)$，但是我們應該有 $(x)\bar{\Phi}(x,x)$.

儘管命題演算的判定問題容易借助於合取範式與析取範式(參見第1章，§4，§6及第1章§8)而解決，類演算的亦然(參見第2章§1與§2)，但在謂詞演算中判定問題却非常困難，就整個說來，是一個還未完全解決的問題. 有一些理由(下文將更詳細說明)甚至於表明了，要想找尋一個完全的解決簡直是無望的了. 但由於這個問題具有頭等的重要性，所以至少把儘量多的公式得出其判定，這種努力還是具有極大興趣的. 下文我們將報告一些這方

面的主要結果.

在以下的整個討論中，我們設想各公式均不再含有自由客體變元. 在討論判定問題的各個已解決的情形前,我們先引一些一般性的定理,它們是與判定問題有關的. 这些定理中有些已在 §10 處提過,如前束範式定理及斯科林範式定理. 它們有下列的優點，當我們考慮一公式的普遍有效性或可滿足性時，可假定它有一個特殊的典範的或歸約的形狀，而不致把討論喪失於一般性之中. 因此它們也可叫做化歸定理. 例如,斯科林定理說(如果我們就可滿足性來表述),對於謂詞演算中每一個已給的公式都可以給出另外一個公式,其首標具有以下形式:

$$(x_1)\cdots(x_m)(Ey_1)\cdots(Ey_n),$$

就可滿足性來說,它與前者是等價的. 因此,就可滿足性問題說,我們只須討論具有這一類首標的公式便夠了.

這類性質的定理都把公式或者歸約爲具有一定的首標的，或者歸約其中出現的謂詞變元的變目的個數，或者歸約出現的謂詞變元的個數等等. 在這方面的大量結果中,我們只提到下列的一些:

就具有同樣的可滿足性來說，對於每個公式都可給出一個公式,其中只有一元及二元的謂詞變元[1]. 更進一步,我們甚至於可以限於以下形狀的公式,其中只有一個二元謂詞變元,而其首標呈以下形式:

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)\cdots(Ey_n),$$

卽只有三個全稱號[2]. 其次,我們又可限於以下形狀的公式,只具

1) Löwenheim, L.: 見 §10 所引的論文.

2) Gödel, K.: Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Phys., Bd. 40 (1933).— Kalmar, L. and J. Suranyi: On the reduction of the decision problem. Second paper. Gödel prefix, a single binary predicate. Journ. Symb. Logic, 12 (1947).

有一個二元謂詞變元,而其首標呈以下形狀:

$$(x_1)\cdots(x_n)(Ey) \text{ 或 } (x_1)(x_2)(Ey)(u_1)\cdots(u_n)$$

即只有一個存在號[1]. 甚至還可限於討論只具有三個全稱號及一個存在號的公式,即其首標具有以下形狀:

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey) \text{ 或 } (x_1)(x_2)(Ey)(x_3),$$

但這時我們却需用多個謂詞變元[2]. 又因為(見下文)當所有全稱號均在存在號之後時,判定問題是解决了的,所以獲得下列的範式(就可滿足性言的範式)是很有興趣的,該範式中只有一個全稱號在存在號之前,即其首標呈以下形狀:

$$(Ex)(y)(Ez)(u_1)\cdots(u_n).$$

這時亦只需一個二元謂詞變元[3]. 關於这些定理的證明,可參見原著[4].

現在再報告一些重要的特例,對於它們,判定問題的解决是幸而成功的. 这些特例與上面的化歸定理可說是兩兩平行的. 我們

---

1) Pepis, J.: Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Fund. Math., 30 (1938). Ein Verfahren der mathematische Logik. Journ. Symb. Logic, 3 (1938).— Suranyi, J.: Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalküls. Mat. es Fizikai Lapok, 50 (1943).

2) 見上註所引第三篇論文.

3) Ackermann, W.: Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann., Bd. 112 (1936).— Kalmar, L.: On the reduction of the decision problem. First paper. Ackermann prefix, a single binary predicate. Journ. Symb. Logic, 4 (1939).

4) 關於這個問題還可再引下列著作: Kalmar, L.: Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen. Comp. Math., Bd. 4 (1936). 又參考其中所引的著者的更早的著作. —Pepis, J.: Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems. Acta Lit. Szeged, Bd. 8 (1936). — Skolem, Th.: Ein Satz über Zählausdrücke. Acta Sci. Math. Szeged, Bd. 7 (1935). Einige Reduktionen des Entscheidungsproblems. Avh. Vid. Akad. Oslo, I. Mat.-nat. Klasse, 1936, Nr. 6.

已有定理，對於謂詞演算的每一個公式，都可以給出一個就可滿足性來說互相等價的公式，其中只出現有一元與二元的謂詞變元，與這定理相應的，我們有以下定理，對於只具有一元謂詞變元的公式，其判定問題是解决了的．我們有定理，就判定問題言，可把公式歸約到具有一定形狀的首標，相應地我們亦有，對於某種一定形狀的首標，其判定問題的解决是成功的．

在一元謂詞變元範圍內的判定問題，其原則上的可能性首先由累文漢[1]給出，更簡單的證明由斯科林[2]及貝曼[3]給出[4]．就其結果來說，这些證明已超出狹義謂詞演算之外，因爲只要僅含有一元謂詞，那就卽使對於第 4 章所討論的第二層次謂詞演算，判定問題亦是解决了的．這我們在下章再行討論．

下面的討論如果就普遍有效性來表述，那是更爲方便的．我們可以把狹義謂詞演算中只含有一元謂詞變元的公式的可判定性，用下面的初等方法而證明(譯者按，第 2 章 §1，§2 處已用更簡便的方法來判定了)．設有一個公式只含有一元謂詞變元．

又設在所討論的公式中出現了 k 個謂詞記號 $A,B,\cdots,K$．我們斷言：如果該公式在所有不多於 2^k 個客體的個體域中都是普遍有效的，那末它便是普遍有效的．

爲了證明這點，我們假設，對於某一多於 2^k 個個體的域言，當對謂詞變元 $A,B,\cdots,K$ 代以一些確定的謂詞 $A_0,B_0,\cdots,K_0$ 後，所考慮的公式變成一個假命題．我們將由這個假命題推出另外一個

1) Löwenheim, L.: 見上引．

2) Skolem, Th.: Untersunchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktion-und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. Vid. Skrifter I, Mat.-nat. Klasse, 1919, Nr. 3.

3) Behmann, H.: Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem. Math. Ann., Bd. 86 (1922).

4) 對於一元謂詞演算的特別透徹的討論可見 Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik (尤其參見 §5, 194—195 頁).

假命題，它亦是把所考慮的公式特殊化而得的，但這時却只與不多過 2^k 個個體的域有關.

我們把該假命題(含有謂詞 $A_0,B_0,\cdots,K_0$)所牽涉的客體作一個分類，如果命題

$$A_0(a),B_0(a),\cdots,K_0(a)$$

分別地與

$$A_0(b),B_0(b),\cdots,K_0(b)$$

同眞假，即

$A_0(a)$ 與 $A_0(b)$ 同眞假

$B_0(a)$ 與 $B_0(b)$ 同眞假

…………………………

$K_0(a)$ 與 $K_0(b)$ 同眞假，

那末我們便把 a,b 算作同一類.

照這辦法我們至多可得 2^k 類. 因爲，對於每個客體 a，$A_0(a)$ 只能或眞或假，$B_0(a)$ 亦然. 因此就整個說來，對於命題

$$A_0(a),B_0(a),\cdots,K_0(a)$$

的眞假性的配合至多有 2^k 個可能性，又如果兩個客體屬於同一個配合，它們便屬於同一類.

設 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 爲所得的不同的類，因而 $n\leqslant 2^k$. 今把類 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的全體當作一個新客體域. 我們就这些客體而定義 k 個謂詞 $A_1,B_1,\cdots,K_1$ 如下：A_1 對類 $\alpha_p(p=1,2,\cdots n)$ 爲眞，當且僅當 A_0 對屬於 α_p 的原來客體爲眞. $B_1,\cdots,K_1$ 的定義準此.

設有隨便一個由謂詞 $A_0,B_0,\cdots,K_0$ 借助於邏輯記號而作成的命題，若把其中的 A_0 換以 A_1，B_0 換以 $B_1,\cdots$，K_0 換以 K_1，並以類 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 作爲變元的値，又把在命題中出現的確定的客體換以該客體所屬的類，那末所得的命題必與原來的命題同眞假.

如果該命題不含有全稱號與存在號，這斷言可立即看出是顯然的. 其次，我們可把該命題寫成範式，並且由具有 m 個量詞時

的眞確性而推出具有 $m+1$ 個量詞時的眞確性，這樣該斷言便得到證明.

由這斷言特别地可推出，上面所假設的假命題，卽把所給的公式中的謂詞變元 $A,B,\cdots,K$ 代以謂詞 $A_0,B_0,\cdots,K_0$ 後所得出的假命題 如果在其中再把 $A_0,B_0,\cdots,K_0$ 代以 $A_1,B_1,\cdots,K_1$，並以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 作爲變元的值時仍然得出一個假命題.

因此我們只須就下列情形來判定：至多有 2^k 個客體，卽就有限個客體的情形來判定便夠了. 正如我們已經看見的，這時可通過有限個步驟來判定.

我們再討論具有任意的謂詞變元的公式. 如果一公式其首標只有全稱號或只有存在號，或所有全稱號均在存在號之前，那末該公式的普遍有效性亦容易加以判定.

首先，設該公式屬於第一種情形，卽該公式有以下形式：

$$(x_1)(x_2)\cdots(x_m)\mathfrak{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m),$$

而在 $\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_m)$ 中不再含有全稱號及存在號. 這公式之爲普遍有效當且僅當它在具有 m 個個體的域內爲普遍有效性時.

如果它在一個多於 m 個個體的域內非普遍有效，那末在該域內便有元素 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 與特殊的謂詞存在，使

$$\mathfrak{A}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$$

變成一個假命題. 立卽可以看出，這時它在域 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 內亦非普遍有效.

公式

$$(Ex_1)\cdots(Ex_m)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_m),$$

其中首標只包含存在號，如果在只具有一個個體的域內爲普遍有效，它便是普遍有效的.

因爲，如果上面公式非普遍有效，那末下面公式亦非普遍有效：

$$(Ex)\mathfrak{A}(x,x,\cdots,x).$$

這本是一個較強的斷言．因此便在某一域內有一元素 a 及一些特殊的謂詞，使得 $\mathfrak{A}(a,a,\cdots,a)$ 變成一個假公式．因此在只具有一個元素 a 的域內它非普遍有效．

用同樣簡單的方法亦可證明，公式

$$(x_1)\cdots(x_m)(Ey_1)\cdots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1\cdots,x_m,y_1\cdots,y_n),$$

其中所有全稱號都在存在號之前，如果在具有 m 個個體的域內爲普遍有效，則它便是普遍有效的．因爲，試在 $\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$ 中把 $y_1,\cdots,y_n$ 隨意地代以變元 $x_1,\cdots,x_m$，因而得出各種下形的公式

$$\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_m,x_{i_1},\cdots,x_{i_n}),$$

再把所有這樣的公式作出析取式．設表之爲 $\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_m)$．顯然，對 m 個個體的域言，由

$$(x_1)\cdots(x_m)(Ey_1)\cdots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$$

的普遍有效性可推出

$$(x_1)\cdots(x_m)\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_m)$$

的普遍有效性，因而亦得

$$(x_1)\cdots(x_m)\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_m)$$

在每一域內的普遍有效性．但 $(x_1)\cdots(x_m)\mathfrak{B}(x_1,\cdots,x_m)$ 是比

$$(x_1)\cdots(x_m)(Ey_1)\cdots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$$

更強的命題，故我們的斷言便證明了[1]．

下面特例的判定問題亦可解決，但已經不能用這樣簡單的工具來達到目的了．對於具有以下形狀的首標的公式

$$(x_1)\cdots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)(z_1)\cdots(z_n),$$

1) 上述的最後那個判定問題特例乃由下列著作而解決的． P. Bernays und M. Schönfinkel: Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann., Bd. 90 (1928).

我們亦可以判定其普遍有效性[1]. 在這特例內，普遍有效性的判定亦是借助於在有限個個體的域內的普遍有效性而得的. 但是能夠用這辦法來判定其普遍有效性的，其首標類型亦盡於此了. 因爲對於其餘的首標型，我們都可以給出一公式，它在所有的有限個體域內是普遍有效的，但在無窮個體域內則否[2].

依照邱吉(Church)與杜令(Turing)先後根據哥德爾的著作而作的探究，可以把找尋判定問題的一般解決這種想法看作是無望的[3]. 關於這個探究不能在本書的範圍內詳細討論. 我們只指出，所謂一般的判定方法乃指對於一些公式有某種計算過程，使得對於其中每個公式都可給出"眞"值或"假"值. 當由上述的著作對一函數的可計算性作出各種形式的精確化後(它們雖彼此不同，但却彼此等價)，這種計算過程的存在性便被否定了.

爲了避免誤會起見，我們指出，所謂一般判定過程的不存在性

1) 參見 K. Gödel 上引著作 (其初步報告已見於 Erg. Wien, math. Koll., Bd. 2(1932). —Kalmar, L.: Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten. Math. Ann., Bd. 108 (1932). —Schütte, K.: Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann., Bd. 109 (1934). — Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. Math. Ann., Bd. 110 (1934). — 如果上述首標中沒有兩個存在號而只有一個，則其判定問題早已由 W. Ackermann 與 Th. Skolem 成功地解決了. 參見 W. Ackermann: Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke. Math. Ann., Bd. 100 (1928). —Skolem, Th.: Über die mathematische Logik. Norsk. mat. Tidskr., Bd. 10 (1928). 後述情形的一個特例早已被前註所引的著作討論過.

2) 見前註所引的 K. Schütte 的第一篇文章.

3) Church, A.: An unsolvable problem of elemantary number theory. Amer. J. Math., Vol. 58 (1936). — A note on the Entscheidungsproblem; Correction to a note on the Entscheidungsproblem. J. Symb. Logic, Bd. 1 (1936). — Turing, A. M.: On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. Lond. Math. Soc., 42 (1937); Correction ibid., 43 (1937). — 又見 Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. II., 416 頁.

並非指，可以給出一個確定的公式能夠證明它的普遍有效性是無法判定的．因爲，若假設存在這個證明，立刻便引起了矛盾．由這樣的一個證明我們可以給出另一個證明，說這個公式不可能由 §5 的公理系統推出．根據 §10 的完備性，我們便可以證明這公式的否定是可以滿足的．因此這公式的普遍有效性是可以判定的，而且得出否定的答案．因此，把可解決其判定問題的公式類加以推廣，這種努力無論如何總是值得的而且是有意義的．

第四章

廣義謂詞演算

§1. 第二層次的謂詞演算

我們所以要把狹義謂詞演算，又名第一層次的謂詞演算加以推廣，乃由於考慮到下列的事實，這個演算的形式體系本身顯然不是封閉的. 例如，我們當然可以表示出：一公式對於其中出現的謂詞變元的一切值都表示一個眞命題；但我們却不能把這個斷言的否定加以表示. 因爲，如果我們把否定符號加在整個公式之上，那只是指，這公式對於謂詞變元的一切值均爲假命題. 但很可能地，一公式既不是對於謂詞變元的一切值均表示眞斷言，也不是對謂詞變元的一切值都表示假命題. 例如，公式$(x)F(x)$對於任何個體域都不是普遍有效的，但公式$\overline{(x)F(x)}$也如此. 爲了要表示$(x)F(x)$不是普遍有效的，我們必須使用關於謂詞的存在號.

因此，作爲對於第一層次的謂詞演算的一個很自然的推廣是：我們使用關於命題變元及關於謂詞變元的全稱號及存在號，並對這種變元區別其爲自由的或約束的.

在上章§4處所確定的邏輯公式的概念，這裏也作相應的推廣. 這樣我們便得到第二層次的謂詞演算.

可用一些例子說明所增加的表達可能性. 公式

$$(P)(x)(P(x)\vee\overline{P}(x))$$

說明了，$(x)(P(x)\vee\overline{P}(x))$對每一謂詞$P$都成立. 公式

$$(A)(F)((x)(A\rightarrow F(x))\sim(A\rightarrow(x)F(x)))$$

說明了，通過

$$(x)(A\to F(x))\sim(A\to(x)F(x))$$

而確定的在命題與謂詞之間的關係，對於任何一個命題及謂詞都成立.

另外一個例是完全歸納原則的符號表述. 在內容上這個原則是：

"如果一個謂詞對數 1 成立，又如果當它對某一個數成立時對其繼數也成立，那末這謂詞對每一數都成立".

今試以記號 $Seq(x,y)$ 表上一數到下一數的關係，那末我們可把這原則表示爲：我們把

$$\{P(1)\ \&\ (x)(y)[P(x)\ \&\ Seq(x,y)\to P(y)]\}\to(x)P(x)$$

假設爲一個眞公式.

如果我們還想明白表示說，這公式對一切謂詞 P 均成立，那末我們可把全稱號 (P) 置於這公式之前.

另外一個有刻劃性的情形是恆等性的定義. 恆等性關係的定義可歸結於邏輯基本關係，我們可說，x 恆等於 y，只要凡對 x 成立的謂詞對 y 亦成立，反之亦然. 照這定義的意義，我們可把恆等記號 $\equiv(x,y)$ 理解爲下列表達式的縮寫

$$(F)(F(x)\sim F(y)).$$

在上述各情形中，其全稱號的使用儘管是很顯然的，但還不是絕對必要的. 另外還有一些情形，其中全稱號的使用却是必要的，如果我們不想拋棄一些重要的表達可能性的話.

例如，如果我們想表達，每一個與恆等性相等價的謂詞都具有對稱性，那末我們便必須如下寫出：

$$(R)\{(x)(y)[R(x,y)\sim(F)(F(x)\sim F(y))]\to(x)(y)(R(x,y)\to R(y,x))\}.$$

這裏，如果把全稱號 (F) 省去，便會更改命題的原來意義.

同樣地，正如上文所提及的，如果要表示，某一個確定的表達式並不是對其中出現的謂詞變元的所有值都是一個眞公式，那末

全稱號亦是不可少的. 例如,為了要表示,$(x)(y)F(x,y)$並非普遍有效的,我們可用公式

$$\overline{(F)}(x)(y)F(x,y),$$

或用同樣意義的公式

$$(EF)(Ex)(Ey)\overline{F}(x,y)$$

來表示. 同樣地,邏輯裏面有關命題及謂詞的許多一般定理亦然:例如,下面的定理:對於每個命題X都有一個命題Y使得這兩個命題中有一亦只有一是眞的(卽有關一命題的否定的存在定理). 這裏若用推廣了的符號,可如下表示

$$(X)(EY)(X \vee Y \,\&\, \overline{X \,\&\, Y}).$$

但若用以前的記號,這個命題却無法表示了.

通過符號的推廣,我們還能夠符號地表述一些問題及其解答,而在以前我們只能借助於冗長的內容方面的寫法. 例如,在第一章 §8 所作的討論. 在那裏所得的結果可用下列的公式表示:

$$(X)(A_1X \,\&\, A_2\overline{X}) \sim A_1 \,\&\, A_2,$$

$$(EX)(A_1X \,\&\, A_2\overline{X}) \sim A_1 \vee A_2.$$

這些公式給出**一條規則**,**使得我們能夠把一個含有關於命題的量詞的表達式**,**代以另一個等價的表達式而其中不再出現有這種量詞的**. 因為,我們可把一表達式依照最內的量詞所屬的變元而展開,並依照上面兩公式所表達的消元規則而把該量詞除去. 例如由

$$(X_1)(X_2)(A_1X_1X_2 \,\&\, A_2X_1\overline{X}_2 \,\&\, A_3\overline{X}_1X_2 \,\&\, A_4\overline{X}_1\overline{X}_2)$$

先除去量詞(X_2)而得

$$(X_1)((A_1 \,\&\, A_2)X_1 \,\&\, (A_3 \,\&\, A_4)\overline{X}_1),$$

再得

$$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3 \,\&\, A_4.$$

如果在一個公式中只有命題變元及所屬的量詞,那末利用這個符號地表達的消元規則便可以辯明它的眞假性. 例如,在上述

的公式

$$(X)(EY)(XY \,\&\, \overline{X \,\&\, Y})$$

中,我們先依照 Y 而展開 $XY \,\&\, \overline{X \,\&\, Y}$,得

$$(X)(EY)(XY \,\&\, \overline{X}\overline{Y}).$$

把最內的量詞消去得

$$(X)(X\overline{X}).$$

但 $X\overline{X}$ 是一個普遍有效的表達式，故 $(X)(EY)(XY \,\&\, \overline{X \,\&\, Y})$ 是一個眞公式.

狹義謂詞演算中兩種形式的判定問題現在都可以符號地表述. 例如公式

$$(Ex)(y)(F(x,x) \vee \overline{F}(y,y) \vee G(x,y))$$

在某個個體域內的普遍有效性或可滿足性，便相應於下列的廣義謂詞演算公式

$$(F)(G)(Ex)(y)(F(x,x) \vee \overline{F}(y,y) \vee G(x,y))$$

或

$$(EF)(EG)(Ex)(y)(F(x,x) \vee \overline{F}(y,y) \vee G(x,y))$$

在該域內的眞確性.

當解釋一個邏輯公式時，我們恆可假定其中不含有任何一種自由變元，因爲凡是具有自由變元的公式我們都可以在前面加入相應的全稱號而除去之. 因此對於第二層次謂詞演算的公式說來,以前意義下的普遍有效性及可滿足性是談不到的. 但是,只用符號仍然不能把一公式的意義唯一地確定着，因爲我們還不知道到底就哪一個個體域而討論的. 例如,如果個體域只由一個元素組成,則

$$(EF)(Ex)(Ey)(F(x) \,\&\, \overline{F}(y))$$

是一個假命題,否則它便永是一個眞命題.

所謂第二層次演算中的永眞公式我們現在是指下面的公式: 隨意選取個體域後它都表示一眞命題. 如果我們願意,仍可叫做

普遍有效公式,但這時所謂普遍有效性只對個體域而言(不再對謂詞變元的選擇言——譯者). 相應地,如果至少有一個個體域,對於它某公式給出一個眞命題,我們便把它叫做可滿足的. 這裏,一公式的普遍有效性與它的否定公式的不可滿足性亦是彼此等價的.

以前狹義謂詞演算中的永眞公式現在仍是永眞公式,但此外還有其它. 設以 $\equiv(x,y)$ 表示 $(F)(F(x)\sim F(y))$ 的縮寫,卽表示恆等性謂詞,那末

$$(x)\equiv(x,x);\quad (x)(y)(\equiv(x,y)\rightarrow\equiv(y,x))$$

便是永眞公式. 此外的例子有

$$(EF)(Ex)F(x);\quad (F)(EG)(x)(y)(F(x,y)\vee\bar{G}(x,y)).$$

如果把狹義謂詞演算中的可滿足公式前面加上相應謂詞的存在號,所得的全是可滿足的,但可滿足的公式並不盡於此. 例如

$$(F)((Ex)F(x)\rightarrow(x)F(x))$$

亦是一個可滿足公式.

接着要問的應該是:是不是和第一層次的演算那樣,在這裏也可以給出一個邏輯基本公式系,使得一切永眞公式可以逐步地根據一定規則而得出? 這裏可以馬上回答說,第二層次的謂詞演算的永眞公式的完備公理系統是不存在的. 反之,照哥德爾所證明的,對於每一個基本公式及推理規則系,都可以給出一個永眞公式而不能由它推出[1]. 但是就大部分的目的說來,下面的系統是足夠的.

一公式的基本成分仍和前面狹義謂詞演算那樣(第三章 §4),卽除了命題聯結詞外,還有命題變元、客體變元及謂詞變元. 公式的形成規則和 66 頁所給的那樣. 公式形成規則 5) 只須如下擴充,卽可借謂詞變元的全稱號及存在號而構成新公式. 這時一元

1) Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Mh. Math. Physik, Bd. 38 (1931).

二元等的謂詞變元必須嚴格區別;在全稱號與存在號中,謂詞變元是不寫出空位的,所以若沒有進一步的寫法,我們便無法區別了.因此我們用下列記號來區別一元二元等謂詞變元,卽在大寫拉丁字母上面按其空位數而放上點子.因此,$\dot{F}$, $\dot{G}$, $\dot{H}$等爲一元謂詞變元,而$\ddot{F}$,$\ddot{G}$等爲二元謂詞變元.在實際寫出公式時,爲了方便起見,大都把這些點省去.的確,如果在一公式中同一大寫拉丁字母不具有不同的點數,我們恆可把點省去.這時我們恆可唯一地補出省去的點,因爲從這公式可使我們辨別出謂詞變元的空位數.(關於命題變元的全稱號及存在號,我們可以不用,因爲凡是含有這樣的記號的公式,都可代以一個等價的但不含有這樣的記號的公式,這正如前數頁所註明的.)

作爲公理系統的基本公式,首先我們採用a)至f),恰和前面(第Ⅲ章§5)對狹義謂詞演算所用的那樣.對基本公式e)我們應該加上任意多個以下形式的基本公式

$$(F)\mathfrak{A}(F)\rightarrow\mathfrak{A}(G),$$

其中F與G理解爲具有同樣點數的.這裏$\mathfrak{A}(F)$是一個公式,含有謂詞變元F但不含有G. $\mathfrak{A}(G)$則是依照規則$\alpha 3$)把$\mathfrak{A}(F)$中的F代入以G而成的公式.同樣地,[對基本公式f]我們亦應該加入任意多個以下形式的公式

$$\mathfrak{A}(G)\rightarrow(EF)\mathfrak{A}(F)$$

作爲基本公式,其中F與G亦含有同數的點.另外還有一些基本公式,與集合論裏面的選擇公理有密切關係.第一個公式是

$$(x)(Ey)G(x,y)\rightarrow(EF)[(x)(Ey)(F(x,y)\&G(x,y))\& \\ \&(x)(y)(z)(F(x,y)\&F(x,z)\rightarrow=(y,z))] \qquad (g)$$

這個公式的意義如下:本來通過一個具有性質$(x)(Ey)G(x,y)$的謂詞G,可以把每一個x都對應於某些y.我們的基本公式說明了,對於每一個x,都可以取出一個這樣的對應值使得其對應是一對一的.F便表示這個一對一的對應.

再設 $\mathfrak{A}(x,F(.,..))$ 爲一公式,其中含有自由客體變元 x 以及自由 n 項謂詞變元 F, 而 $\mathfrak{A}(x,G(x,\cdots))$ 則指下列的公式: 根據規則 $\alpha3)$ 把 $\mathfrak{A}(x, F(.,..))$ 中的每一個部分表達式 $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n)$ 都代以 $G(x,\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots,\mathfrak{a}_n)$ 而得的, 其中 G 是一個 $n+1$ 項謂詞變元. 這時我們又可把

$$(x)(EF)\mathfrak{A}(x,F(\cdots))\rightarrow(EG)(x)\mathfrak{A}(x,G(x,\cdots)) \qquad \text{(h)}$$

當作基本公式. 這個公式的眞確性可如下地看出. 如果對於每個 x 都有一個 F 使得 $\mathfrak{A}(x,F(\cdots))$ 成立,那末我們可對於每個 x 都選取一個 F,設記之爲 F^x. 今定義 G 如下:

$$(x)(y_1)(y_2)\cdots(y_n)(G(x,y_1,\cdots,y_n)\sim F^x(y_1,\cdots y_n)),$$

那末我們便得,G 也具有基本公式 h) 所假設的性質.

推演規則與狹義謂詞演算中的同樣,只是規則 $\gamma1),\gamma2),\delta)$ 須如下推廣,即它對每一種謂詞變元都成立.

由這個系統可以得知,但這裏我們不預備再深入了,以前我們對狹義謂詞演算所推得的結果,現在可以在相應意義上加以推廣. 例如,前束範式定理, 對偶原則, 關於一公式的否定的作成的定理等等,都繼續有效. 同樣地,狹義謂詞演算中每一個含有個體變元的公式,都對應於一個含謂詞變元的公式. 例如,由於

$$(x)(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow((Ex)F(x)\rightarrow(Ex)G(x))$$

是一個可推的公式[公式(34)]的事實,現在便相應於

$$(F)(\mathfrak{A}(F)\rightarrow\mathfrak{B}(F))\rightarrow((EF)\mathfrak{A}(F)\rightarrow(EF)\mathfrak{B}(F))$$

的可推性. 要推出它只須把公式 (34) 的證明作相應的更改便成了. 對狹義謂詞演算的所有公式亦均如此.

所謂第二層次的判定問題是指:給出演算中一個公式,要判定它到底是一個**永眞公式**或否. 在更嚴格的表述下,是要判定它在哪一個個體域下是一個眞命題,在哪一個域下則否. 因爲第二層次的判定問題包含了第一層次的, 因此它的一般解決是沒有希望的.

作為唯一的重要的結果（除却屬於狹義謂詞演算的因而已經解决了的以外）我們有：只含有一元謂詞的那一類公式，其判定問題是完全解决的．其證明見於前章 §12 所引的界文漢、斯科林及貝曼的著作．這個判定問題而且是在嚴格意義下解决的．

這個判定過程的細節我們介紹讀者參看寫得特別清楚的貝曼的著作．這裏只想對其所用的方法作一個簡短的刻劃．在一元謂詞的範圍內解决判定問題乃歸結於在這個範圍內消元問題的解决．所謂消元問題我們一般地理解為：設有一公式 $\mathfrak{A}(F, G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k)$，其中含有自由謂詞變元 $F, G_1, \cdots, G_m$，自由個體變元 $x_1, \cdots, x_k$，此外還可有約束個體變元，但却沒有約束謂詞變元．我們問，有沒有一個不含約束謂詞變元的公式 $\mathfrak{B}(G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k)$，使得

$$(F)\mathfrak{A}(F, G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k) \sim \mathfrak{B}(G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k)$$

或

$$(EF)\bar{\mathfrak{A}}(F, G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k) \sim \bar{\mathfrak{B}}(G_1, \cdots, G_m, x_1 \cdots, x_k)$$

是一個第二層次的永眞公式．如果有的話，那末在每一公式中，凡部分公式

$$(F)\mathfrak{A}(F, G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k)$$

及

$$(EF)\bar{\mathfrak{A}}(F, G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k)$$

都可分別地換為 $\mathfrak{B}(G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k)$ 及 $\bar{\mathfrak{B}}(G_1, \cdots, G_m, x_1, \cdots, x_k)$．因此我們便能夠在這樣的一公式內把謂詞變元 F 消去了．

這問題與判定問題的關係是容易了解的．如果我們有一個謂詞演算的公式而要解决其判定問題，那末我們把其中的自由謂詞變元所屬的全稱號放在整個公式之前，因而把自由謂詞變元消去，如果消元問題是可解的，我們便從裏面開始，把謂詞變元一個一個地消去，最後便得出"眞"或"假"或一個數目條件．

這個用消元來歸約一公式的方法可用以下公式為例而更能詳

細說明:

$$(F)\{(Ex)F(x)\vee(EG)[(x)(G(x)\sim\bar{F}(x))\ \&\ (x)G(x)]\}.$$

首先,我們指出,公式

$$(EF)(x)(A(x)\vee F(x)\ \&\ B(x)\vee\bar{F}(x))\sim(x)(A(x)\vee B(x)) \qquad (甲)$$

的左邊可變形成

$$(EF)(x)\{(\bar{F}(x)\rightarrow A(x))\ \&\ (F(x)\rightarrow B(x))\},$$

故容易看見公式甲是一個永眞公式,因而給出一個基本的消元方法.借助於這公式我們便可以把我們的開始公式中的G消去.因爲,我們可把(EG)的作用域,卽下列的部分公式

$$(x)(G(x)\sim\bar{F}(x))\ \&\ (x)G(x)$$

換爲[依照第一章,§2 中公式(29),第三章,§6 中的公式(30)]

$$(x)(G(x)\vee F(x)\ \&\ \bar{G}(x)\vee\bar{F}(x)\ \&\ G(x)),$$

或換爲

$$(x)(G(x)\ \&\ \bar{F}(x)\vee\bar{G}(x)),$$

再換爲

$$(x)[(F(x)\ \&\ \bar{F}(x))\vee G(x)\ \&\ \bar{F}(x)\vee\bar{G}(x)]$$

因此根據上面的基本消元公式有

$$(EG)(x)[(F(x)\ \&\ \bar{F}(x))\vee G(x)\ \&\ \bar{F}(x)\vee\bar{G}(x)]\sim$$
$$\sim(x)[(F(x)\ \&\ \bar{F}(x))\vee\bar{F}(x)].$$

但是我們可把

$$(x)[(F(x)\ \&\ \bar{F}(x))\vee\bar{F}(x)]$$

換爲 $(x)\bar{F}(x)$. 因此,當把謂詞變元 G 消去後,上面的開始公式,卽

$$(F)\{(Ex)F(x)\vee(EG)[(x)(G(x)\sim\bar{F}(x))\ \&\ (x)G(x)]\}$$

便變成

$$(F)\{(Ex)F(x)\vee(x)\bar{F}(x)\}.$$

因爲這公式中 (F) 的作用域呈 $\mathfrak{A}\vee\bar{\mathfrak{A}}$ 之形,故立刻可以看出,該開始公式是一個永眞公式.

上面已經指出，如果只有一元謂詞，消元問題是完全解决了的．又因爲在處理判定問題時，消元過程是唯一的具有一般效果的方法，因此我們當然要找尋，卽使有二元及多元謂詞時也可使用的消元過程．對於有特殊結構的公式來說，的確仍然可以消元．關於這方面的大量結果可見於施累德的“邏輯代數講義”第三卷中．不幸我們可以證明，能夠找出一些公式，對於它們上面所定義的消元結果是沒有的，因此一般地說，消元問題須作進一步的理解才成[1]．這時它與判定問題的關聯也將更爲複雜．

在符號方面說來，第二層次的謂詞演算是一個自足的領域，而狹義謂詞演算中好些問題也只有在其中才有符號的表述．由於這個理由我們才把它特立一節．但在這領域內的探究，除却上面已提到的一些特例外，幾乎是沒有的．

§2. 謂詞謂詞的引入：數目概念的邏輯處理

就我們迄今作爲邏輯謂詞演算基礎的內容根據來說，命題與謂詞是必須嚴格地與客體相區別的，客體只能作爲謂詞的變目而考慮．但我們仍可以把謂詞與命題本身當作客體，作爲別的謂詞的變目．

例如，試考慮形如 $(x)(A\rightarrow F(x))$ 的邏輯表達式．它可以當作一個謂詞 $P(A,F)$，其第一空位被命題 A 填補，而第二空位則被一元謂詞 F 填補．

對一個假命題 A 及每一個 F，關係 $P(A,F)$ 都成立；對一個眞命題 A，只有使 $(x)F(x)$ 成立的 F 才使這關係成立．

另外一些例子是二元謂詞的自反性、對稱性及可傳性．這些性質相應於三個謂詞：$\mathrm{Ref}(R)$，$\mathrm{Sym}(R)$ 及 $\mathrm{Tr}(R)$，它們都以二元謂

1) 參見 W. Ackermann: Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann., Bd. 110(1934).—Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann., Bd. 111 (1935).

詞爲變目．這三個性質可符號表達如下：

$$\mathrm{Ref}(R):\quad (x)R(x,x),$$

$$\mathrm{Sym}(R):\quad (x)(y)(R(x,y)\rightarrow R(y,x)),$$

$$\mathrm{Tr}(R):\quad (x)(y)(z)[R(x,y)\ \&\ R(y,z)\rightarrow R(x,z)].$$

謂詞$\equiv(x,y)$(x 恆等於 y)具有這三個性質，反之，謂詞$<(x,y)$却只具有可傳性．因此，公式 $\mathrm{Ref}(\equiv)$，$\mathrm{Sym}(\equiv)$，$\mathrm{Tr}(\equiv)$及 $\mathrm{Tr}(<)$表示眞命題，而 $\mathrm{Ref}(<)$ 及 $\mathrm{Sym}(<)$ 是假命題．

二元的謂詞謂詞可舉"等價性" $\mathrm{Aeq}(F,G)$爲例，它可定義爲表達式 $(x)(F(x)\sim G(x))$，卽 F 與 G 對於同樣的變目都同時成立或不成立．二元的謂詞謂詞的其它例子有**不並立性** $\mathrm{Unv}(F,G)$ 與**蘊涵性** $\mathrm{Imp}(F,G)$，它們可符號地定義如下：

$$(x)(\bar{F}(x)\vee\bar{G}(x)),$$

$$(x)(F(x)\rightarrow G(x)).$$

但是我們的符號並不因這樣的理解而有所推廣，因爲這些謂詞謂詞可以借助於以前演算的工具來表示，而公式 $\mathrm{Ref}(R)$，$\mathrm{Sym}(R)$等可以只當作縮寫．推廣的出現首先在於引入謂詞謂詞變元，卽以上面這些個別的謂詞謂詞作其變值的變元．但下面我們對這類的變元只是偶然地使用，因爲系統的構造廣義演算將在後面才能談到．在本節及下節，我們只想指出，引入謂詞謂詞具有什麽樣的優點．

第一個重要的應用是**數目概念的邏輯探究**．一個數目並非本義的客體而只是一個性質．當該個體以某數目爲性質時，絕不是各個體自己以該數目爲性質．因爲每一客體都只是一個 1，因而 1 以外的數目絕不能適用於它．反之，數目却是某概念(它聯系這些個體的)的性質．例如，"洲數爲五"這事實絕不能表達爲：個數 5 出現於每一個洲上；反之，"爲洲"這個謂詞却有下列性質：它出現於 5 個個體上．

因此，數目是謂詞的一個性質，在我們的演算中，**一個確定的**

數即表示為一個確定的謂詞謂詞. 表達式的數目的重要性在於:表示數目的謂詞謂詞可完全借助於邏輯符號而表達. 因此,可把數論包含於邏輯之中. 數 0,1,2 即謂詞謂詞 $0(F),1(F),2(F)$ 可用以下表達式而給出:

$$0(F):\ \overline{(Ex)}F(x).$$

(“沒有 x 使 F 成立”)

$$1(F):\quad (Ex)[F(x)\&(y)(F(y)\rightarrow\equiv(x,y))].$$

(“有一個 x 使 $F(x)$ 成立, 並且每一個使 $F(y)$ 成立的 y 都與 x 恆等”.)

$$2(F):\ (Ex)(Ey)\{\overline{\equiv}(x,y)\&F(x)\&F(y)\&(z)[F(z)\rightarrow\equiv(x,z)\vee\equiv(y,z)]\}.$$

(“有兩個不同的 x,y 使 F 成立, 而每一個使 $F(z)$ 成立的 z 都與 x 或 y 恆等”.)

兩個謂詞 F 與 G 的等數性亦可理解為一個謂詞謂詞 $\mathrm{Glz}(F,G)$. 因為 F 與 G 的等數性不外是指:使 F 成立的客體與使 G 成立的客體可以一對一地對應,因此 $\mathrm{Glz}\ (F,G)$ 便可以由以下表達式定義:

$$(ER)\{(x)[F(x)\rightarrow(Ey)(R(x,y)\ \&\ G(y))]\ \&\ (y)\ [G(y)\rightarrow (Ex)(R(x,y)\ \&\ F(x))]\ \&\ (x)(y)(z)[(R(x,y)\ \&R(x,z)\rightarrow \equiv(y,z))\ \&\ (R(x,z)\ \&\ R(y,z)\rightarrow\equiv(x,y))]\}.$$

數目的加法可化歸為謂詞的析取. 因為,設 F 與 G 為不並立的謂詞, 而謂詞 F 屬於數 m, 謂詞 G 屬於數 n, 則相應地, 謂詞 $F\vee G$ 屬於數 $m+n$.

根據這個加法概念,那末

$$1+1=2,\quad 2+3=5$$

等等數目等式便變成純邏輯的可證定理. 例如, 等式 $1+1=2$ 可表成邏輯公式:

$$(F)(G)([\mathrm{Unv}(F,G)\ \&\ 1(F)\ \&\ 1(G)]\rightarrow 2(F\vee G));$$

它的永真性是很顯然的, 只要我們把謂詞謂詞 Unv 及謂詞謂詞 1

與 2 換爲它們的定義式便可知道.

一般的數目概念亦可以用邏輯工具來表示. 要使得謂詞謂詞 $\Phi(F)$ 表示一數,那末 Φ 必須滿足下列條件:

如果謂詞 F 與 G 是等數的,Φ 必須對它們同時成立或不成立. 如果兩謂詞 F 與 G 不是等數的,那 Φ 至多只能對兩謂詞 F 與 G 之一成立.

對 Φ 的這個條件可以形式地表達如下:

$$(F)(G)\{(\Phi(F)\,\&\,\Phi(G)\rightarrow \mathrm{Glz}(F,G))\,\&\,[\Phi(F)\,\&\,\mathrm{Glz}(F,G)\rightarrow\Phi(G)]\}.$$

這整個表達式表示 Φ 的一個性質. 今若把這個式子縮寫爲 $3(\Phi)$,我們便可以說:

一個數乃一個謂詞謂詞 Φ 而具有性質 $3(\Phi)$ 的.

如果我們要問,在什麽條件下具有性質 $3(\Phi)$ 與 $3(\Psi)$ 的兩個謂詞謂詞 Φ 與 Ψ 是定義爲同一數的,那末我們便遇到了困難. 這個條件本是: $\Phi(P)$ 與 $\Psi(P)$ 須對於同樣的謂詞 P 並眞或並假, 因此須下面關係成立:

$$(P)(\Phi(P)\sim\Psi(P)).$$

今設作爲基本的個體域是由有限個客體組成的. 這時有一個不幸的情況出現: 凡是比個體域內的個體個數更大的數通通相等. 因爲,設個體個數比某一數,例如 10^{60}, 爲小, 並設 Φ 與 Ψ 定義爲數 10^{60} 與 $10^{60}+1$ 的兩個謂詞,那末 Φ 與 Ψ 對於任何謂詞 P 均不成立. 因此關係式

$$(P)(\Phi(P)\sim\Psi(P))$$

便被 Φ 與 Ψ 所滿足,即 Φ 與 Ψ 將表示爲同一數.

爲了避免這個困難,我們必須假定個體域是無窮的. 對於無窮總集存在性的邏輯證明這時却被放棄了.

特別有趣的還有下列一點, 在邏輯地引入數目概念並且使用了上述的無窮公理後,數論上的公理如何地變成邏輯的可證定理.

但這裏我們却不能再行深入了[1]. 上面的一些話不過是使我們正確地看出廣義演算的廣泛應用的可能性.

§3. 集合論的基本概念在廣義演算中的表示

集合論與數理邏輯之間有緊密的關係，這在上面第二章處早已可以看出了. 同一個公式可以隨意地理解爲諸類之間的關係或理解爲一元謂詞之間的關係並不因而使使其間的邏輯連系有所改變. 就是現在，如果把我們演算中所表達的邏輯連系理解做集合論中的關係亦是可能的.

爲了要把這個連系看得更清楚些，我們首先把集合與狹義的謂詞，卽具有一個空位的謂詞看得更仔細些. 一個集合或者由列出它的元素而定義，或者定義爲使一定的謂詞成立的那一系客體. 確定集合的第一種方法(只是對於有限集合才可能)，我們無需特別加以考慮. 因爲，每一個由列出其元素而定義的集合，亦可以借助於一謂詞而定義. 例如，由三個個體 a,b,c 而組成的集合，可以當作使下列謂詞成立的客體 x 的集合

$$\equiv(x,a) \vee \equiv(x,b) \vee \equiv(x,c).$$

因此，我們設每個集合均由一謂詞而定義. 但是我們必須注意，每個謂詞的確唯一地確定相應的集合，卽，使它成立的客體的集合，但一個確定的集合並不只是相應於一個謂詞，反之，一個集合可以由種種不同種類的謂詞來定義. 例如，等邊三角形集合與等角三角形集合相同，數學以外的例子如：現在生存的反芻類與現在生存的偶蹄類相同.

兩謂詞 P 與 Q 確定同一集合的必要與充分條件是，這兩個謂詞等價，卽它們滿足關係式 $\mathrm{Aeq}(P,Q)$ 亦卽 $(x)(P(x)\sim Q(x))$. 因

---

1) 關於這個問題的詳細的、容易理解的處理可參見羅素：數理哲學導論，1922. (譯者按，有中譯本傅種孫、張邦銘譯)

此在集合論的意義上,謂詞謂詞 $\mathrm{Aeq}(P,Q)$ 不外是指 P 與 Q 恆等.

正如我們可以把謂詞理解作集合一樣,我們可以把一元的謂詞謂詞 $F(P)$ 理解作集合的性質. 要使得這種看法為可能,必須 F 對於一謂詞 P 成立或不成立這件事能夠由 P 所屬的集合唯一地確定,根據上面的注意,判定這事的條件是,把等價的謂詞代入 F 的變目處後所得的命題須並眞或並假. 因此,謂詞 F 必須滿足下面的符號關係式

$$(P)(Q)\{\mathrm{Aeq}(P,Q)\rightarrow(F(P)\rightarrow F(Q))\},$$

這式可縮寫為 $\mathfrak{M}(F)$.

例如,表示數目的謂詞謂詞便滿足這條件. 由於數目這個性質,我們亦可把數看作集合的性質. 把數看作集合的性質比之把數看作謂詞的性質具有下列的優點,即當把一謂詞換為它的等價謂詞時,數目的不變性是顯然自明的.

由集合與謂詞之間的關係還可推得集合的集合與謂詞的謂詞之間的關係. 每一個集合的集合都可通過屬於它的集合所公共具有的性質而定義.

設有兩個集合的謂詞,即謂詞謂詞 $F(P)$ 與 $G(P)$,它們滿足條件 $\mathfrak{M}(F)$ 及 $\mathfrak{M}(G)$. 如果這兩個集合謂詞 F 與 G 對於同樣的集合並眞或並假,那末它們便確定同一的集合的集合. 因此關係式 $(P)(F(P)\sim G(P))$ 便意指,由 F 與 G 所對應的集合的集合是恆等的.

對廣義演算所作的集合論解釋亦可以推廣到具有多個空位的謂詞上. 每一個謂詞 $R(x,y)$ 都從一切可能的有序對偶 (x,y) 中挑選出一個確定的有序對偶集,即,使 $R(x,y)$ 成立的那些對偶 (x,y) 的集. 當關係式 $\mathrm{Aeq}(R_1,R_2)$ 成立時,即當 $(x)(y)\ (R_1(x,y)\sim R_2(x,y))$ 成立時,兩謂詞 R_1,R_2 所對應的集便全等. 要使得一個謂詞謂詞 $F(R)$ 可以理解為所對應的集合的謂詞,它必須適合關係式

$$(R_1)(R_2)\{\mathrm{Aeq}(R_1,R_2)\rightarrow(F(R_1)\rightarrow F(R_2))\}.$$

具有三個及多個空位的謂詞準此.

由此可以看出,廣義演算既可以作純邏輯的解釋,亦可以作集合論的解釋. 數論可以完全依照集合論的解釋而處理. 我們已經看見,定義數目的謂詞謂詞亦可以理解作集合的謂詞. 其次,我們上文又說過,如果兩個表示數目的謂詞謂詞 $\Phi(P)$ 與 $\Psi(P)$ 成立關係式

$$(P)(\Phi(P)\sim\Psi(P)),$$

那末該兩謂詞便對應於同一數.

由此更可得,數目亦可理解為集合的集合. 依照邏輯的定義,數目是一個謂詞謂詞, 它對於所有等數性的謂詞亦只對於這樣的謂詞成立. 謂詞的等數性相應於集合的等價性(這裏等價性理解為通常的集合論的意義). 因此由數目的邏輯概念我們便得到數目的集合論概念; 這時一數不外是與一個固定的集合相等價的所有集合所組成的集合.

我們現在試看, 集合論中通常的概念如何在演算中找到了它的符號表達式.

設謂詞 $P_1(x)$ 與 $P_2(x)$ 定義兩個集合, 那末兩集的併集便由 $P_1(x)\vee P_2(x)$ 所給出. $P_1(x)\ \&\ P_2(x)$ 便給出 P_1 與 P_2 的交集. 如果 $(x)(P_1(x)\rightarrow P_2(x))$ 是一個眞斷言,那末 P_1 便包含於 P_2 之內或 P_1 為 P_2 的子集合. 如果兩集合 P_1,P_2 的元素可以一對一地相對應, 那末 P_1 與 P_2 便是等價的. 它的符號表達式與謂詞的等數性的表達式相同.

表達式

$$(x)(y)(z)([R(x,y)\ \&\ R(x,z)\rightarrow\equiv(y,z)]\ \&\ [R(x,z)\ \&\ R(y,z)\rightarrow\equiv(x,y)])$$

或者簡短地記為 $\mathrm{Eind}(R)$, 意指,關係 $R(x,y)$ 只要它成立,是兩面單值的. 因此 P_1 與 P_2 的(集合論上的)等價性的符號表達式是:

$$(ER)\{(x)[P_1(x)\rightarrow(Ey)(R(x,y)\ \&\ P_2(y))]\ \&$$
$$\&(y)[P_2(y)\rightarrow(Ex)(R(x,y)\ \&\ P_1(x))]\ \&\ \mathrm{Eind}(R)\}.$$

設 D 定義一集合，那末所有它的子集合的集合可由一個確定的謂詞謂詞 Te(P) [或更適當地用 Te(P,D)] 而表示．每一個使 Te(P) 成立的謂詞 P 都必須具有以下性質，即它的元素亦是 D 的元素．因此 Te(P) 可由以下表達式來定義：

$$(x)(P(x)\rightarrow D(x)).$$

今設 $F(P)$ 表示某一個集合的集合．這集合的集合的併集的元素 x 可如下刻劃，即它們至少是使得 $F(P)$ 成立的 P 所對應的集合中的一元素．因此作爲併集的定義的表達式我們有

$$(EP)(F(P)\ \&\ P(x)).$$

集合的集合的交集的元素可如下定義，即它是每一個使得 $F(P)$ 成立的集合 P 的元素．因此交集可表爲

$$(P)(F(P)\rightarrow P(x)).$$

如果對於集合 P 的元素可以定義出一個二元謂詞 R，它是不自反的但却是可傳的，而且對於隨便一對不同的 x,y，它或者對於對偶 (x,y) 成立，或者對於對偶 (y,x) 成立，我們便說集合 P 是有序的．因此，"集合 P 通過謂詞 R 而有序"可用符號表示爲：

$$(x)(y)(z)\{[P(x)\ \&\ P(y)\ \&\ P(z)]\rightarrow[\overline{R}(x,x)\ \&\ (\equiv(x,y)\vee$$
$$\vee R(x,y)\vee R(y,x))\ \&\ (R(x,y)\ \&\ R(y,z)\rightarrow R(x,z))]\}.$$

我們把這公式簡記爲 $\mathfrak{O}(P,R)$．

如果以下命題是一個眞命題：

$$\mathfrak{O}(P,R)\&(Q)\{(x)(Q(x)\rightarrow P(x))\rightarrow(Ey)[Q(y)\&$$
$$\&\ (z)(Q(z)\rightarrow\equiv(y,z)\vee R(y,z))]$$

我們便說集合 P 通過謂詞 R 而有良序(或通過謂詞 R 而整序)．

用相應的方法，我們可對在集合論中使用的其它所有的概念都在演算中找出其符號表達式．

§4. 邏輯悖論

在前兩章中我們看見了，由於引入了謂詞謂詞，我們得到了怎

樣廣大的表達可能性．每一個含有自由謂詞變元 F 的公式，都可以理解為一個個別的謂詞謂詞．其次，我們還可以引入謂詞謂詞變元．一個含有這種變元的公式又表示一個個別的以謂詞謂詞為變目的謂詞等等．這種構作可以隨意延伸下去．

因此，除却個體域內的客體以外，還可把謂詞、謂詞謂詞等當作廣義的客體．我們要問，能否隨便地把這些廣義客體連結而成一個單一的客體域，使得除却個體謂詞、謂詞謂詞等以外，還可以直捷地說謂詞，並且這種新個體域內的每一個謂詞仍屬於該個體域？在這情形下，一個謂詞必然可以作為它自身的變目．相應地，對謂詞謂詞等概念亦須同樣地作一般性的理解．

我們由狹義謂詞演算出發而上升到高級謂詞的方法對於這種看法並沒有給出任何幫助．因為，在前幾節的討論中，我們永遠只是討論個體謂詞、這種個體謂詞的謂詞等等．但是這種一般的謂詞概念在不準確的日常用語中確是有的[1]．現在可以證明，這樣的一種邏輯系統，甚至於不能夠滿足不矛盾性這個要求．所出現的矛盾，所謂**詩論**（我們亦可以不必用邏輯的符號而引入），可以就純粹邏輯的意義或就集合論的意義來給出，這須看我們對謂詞演算用哪一個意義而定．對於這些矛盾現在我們給出一些例子．

設 $P(F)$ 為一個謂詞謂詞．因為 P 本身是一個謂詞，所以 $P(P)$ 是一個命題，它可眞可假．使得 $P(P)$ 為眞命題的那種謂詞謂詞可舉謂詞 $0(F)$（F 對任何客體不成立）的否定，即函數 $\overline{0}(F)$ 為例子，它可定義為 $(Ex)F(x)$．$\overline{0}(\overline{0})$ 是 $(EF)\overline{0}(F)$ 的縮寫，它又可寫為 $(EF)(Ex)F(x)$．後者的確是一個眞斷言，因它說，“有一謂詞 F 及一客體 x 使 $F(x)$ 成立”．

反之，$0(0)$ 是一個假命題．因為根據 0 的定義有

$$0(0)\sim\overline{(EF)}0(F)\sim\overline{(EF)}\,\overline{(Ex)}F(x)\sim(F)(Ex)F(x).$$

1）就演算的集合論意義說，它相當於素樸集合論的說法．

後一表達式是一個假命題，因它說每一謂詞都至少對一個客體成立.

因此我們可把表達式 $P(P)$ 理解作 P 的謂詞,這謂詞表示以下性質:謂詞可適用於自身. 今把這個謂詞謂詞記爲 $Pd(P)$（讀爲:"P 是可謂的"）. 因爲 Pd 及 $\overline{Pd}$ 本身都是謂詞謂詞，所以表達式 $Pd(\overline{Pd})$ 及 $\overline{Pd}(\overline{Pd})$都有意義. 或者 $\overline{Pd}(\overline{Pd})$是眞的,即謂詞 $\overline{Pd}$ 是可適用於自身,因而 $Pd(\overline{Pd})$亦眞. 或者 $\overline{Pd}(\overline{Pd})$是假的,這時謂詞謂詞 $\overline{Pd}$ 不適用於自身,即 $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ 是眞的. 因此得出

$$Pd(\overline{Pd})\sim\overline{Pd}(\overline{Pd}).$$

但這是一個矛盾,因爲一個邏輯表達式永遠不等價於它的否定.

這詩論首先由羅素發現. 我們亦可把它按集合論的表達法而表示. 這時相應於謂詞謂詞 $\overline{Pd}$ 的是所有不以自己爲元素的集合的集合. 這集合從它概念的本身來說便是矛盾的,因爲根據它的定義,它是它自身的元素當且僅當它非自身的元素時.

要說的第二個詩論希臘哲學家們早已知道. 它的最簡單的表述是: 設有人說:"我說謊",或者更淸楚地,"我現在說一個假句子":因爲只要這命題爲假,它便眞;當它眞,它便假.

在表述這個詩論時,我們要稍微嚴格一些. 設 $\mathfrak{P}$ 表示一個確定的人，而 t 爲一個確定的時間間隔的縮寫記號. 在時間間隔 t 之內 $\mathfrak{P}$ 說出下列一句話:"$\mathfrak{P}$ 在時間間隔 t 內所斷言的一切都是假的":此外, $\mathfrak{P}$ 在時間 t 內不再說出別的話. 這個假設不會是矛盾的,因爲人們的確可以故意地使它實現. 爲了用邏輯記號表示它,我們把 $\mathfrak{P}$ 所說的命題記爲 $\mathfrak{A}$,而用謂詞記號 $\mathrm{Bh}(X)$ 表示:"$\mathfrak{P}$ 在時間間隔 t 內斷言 X",其中作爲變目 X 的值的是每一個命題.

借助於這些記號首先我們可把命題 $\mathfrak{A}$ 表成以下公式

$$(X)(\mathrm{Bh}(X)\rightarrow\overline{X});$$

而我們的假設，即 $\mathfrak{P}$ 在時間間隔 t 內說出 $\mathfrak{A}$ 但不再說別的，便可由下列兩個公式表示:

$$\mathrm{Bh}(\mathfrak{A});\ (X)(\mathrm{Bh}(X)\to\equiv(\mathfrak{A},X)).$$

矛盾便照下列方式出現. 在眞公式 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ 內把第二項的 $\mathfrak{A}$ 代以命題 $(X)(\mathrm{Bh}(X)\to\overline{X})$,它確是命題 $\mathfrak{A}$ 的符號表示式. 因此便得

$$\mathfrak{A}\to(X)(\mathrm{Bh}(X)\to\overline{X}).$$

依照演算的規則可把全稱號(X)除去,得

$$\mathfrak{A}\to(\mathrm{Bh}(X)\to\overline{X}).$$

代入得

$$\mathfrak{A}\to(\mathrm{Bh}(\mathfrak{A})\to\overline{\mathfrak{A}}),$$

因爲前提是可以交換的,故這公式可以變形爲

$$\mathrm{Bh}(\mathfrak{A})\to(\mathfrak{A}\to\overline{\mathfrak{A}}).$$

因爲 $\mathrm{Bh}(\mathfrak{A})$ 是一個眞公式,故得

$$\mathfrak{A}\to\overline{\mathfrak{A}}.$$

另一方面可證 $\overline{\mathfrak{A}}\to\mathfrak{A}$. 因爲首先可得

$$\overline{\mathfrak{A}}\to\overline{(X)}(\mathrm{Bh}(X)\to\overline{X}),$$

故

$$\overline{\mathfrak{A}}\to(EX)(\mathrm{Bh}(X)\ \&\ X).$$

其次,由我們已假設爲眞的公式

$$(X)(\mathrm{Bh}(X)\to\equiv(\mathfrak{A},X))$$

可得

$$(X)(\mathrm{Bh}(X)\ \&\ X\to\equiv(\mathfrak{A},X)\ \&\ X).$$

因而

$$(EX)(\mathrm{Bh}(X)\ \&\ X)\to(EX)(\equiv(\mathfrak{A},X)\ \&\ X),$$

故得

$$\overline{\mathfrak{A}}\to(EX)(\equiv(\mathfrak{A},X)\ \&\ X) \qquad (甲)$$

但由恆等性的意義可知 $\equiv(\mathfrak{A},X)\ \&\ X\to\mathfrak{A}$ 是一個眞公式. 由它根據規則 γ) 得

$$(EX)(\equiv(\mathfrak{A},X)\ \&\ X)\to\mathfrak{A}.$$

這公式與上面得出的公式(甲)合併給出

$$\bar{\mathfrak{A}}\to\mathfrak{A}.$$

由 $\mathfrak{A}\to\bar{\mathfrak{A}}$ 及 $\bar{\mathfrak{A}}\to\mathfrak{A}$ 這兩個可證公式可推出 $\mathfrak{A}$ 及 $\bar{\mathfrak{A}}$ 均爲眞公式，因此事實上我們便引出了一個矛盾.

我們還想給出第三個詩論，它可以有多種不同的講法. 一個最簡單的表示形式如下：要記出一個數，不管是給出約定的記號或給出用以定義的性質，都需要一定的最低限度的時間. 因此在有限時間之內有限多的人只能記出有限多個數. 另一方面，數是無窮多個的. 因此在 20 世紀內住在地球上的人當然不能夠記出所有的數. 在 20 世紀所沒有記出的數中必有一個最小者. 但這個數的確已在 20 世紀中記出來了：因爲我已經把它用下列方式確定：它是 20 世紀所沒有記出來的數中的最小者. 因此存在有一個數，它既被記出又未被記出.

爲了要把這論證能夠表達於我們的演算之內，我們把它更精確化一些，因此我們把"記錄"這概念換以一個更狹隘的概念. 對於一數我們只考慮下列的表示法，卽寫出這數的定義謂詞的表達式(依照我們的邏輯符號的意義來說). 所謂數 x 的定義謂詞乃指一謂詞，它對數 x 成立但對任何其它的數都不成立[1]. 這樣我們可如下地表述這詩論：

設 $\mathrm{Scr}(P)$ 表示謂詞 P 的下列性質：在 20 世紀所寫出的邏輯符號表達式中至少有一個是 P 的表達式. 記號 $<(x,y)$ 仍如前表示謂詞"x 小於 y"；這謂詞的空位是只填以正整數的.

其次，爲簡短起見，把表達式

$$P(x)\ \&\ (y)(P(y)\to\equiv(x,y))$$

記爲 $\mathrm{Df}(P,x)$，它說，x 通過謂詞 P 來定義. 又把

$$(EP)(\mathrm{Df}(P,x)\ \&\ \mathrm{Scr}(P))$$

1) 數可理解爲謂詞謂詞這一點，在現在的討論中是不必顧及的.

省略記以符號 $\mathrm{Dsc}(x)$.

因此，$\mathrm{Dsc}(x)$ 意指："在二十世紀所寫出的符號表達式中，至少有一個是 x 的定義謂詞". 最後，爲簡短起見，表達式

$$\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,(y)(<(y,x)\rightarrow \mathrm{Dsc}(y))$$

記爲 $\mathrm{Mds}(x)$，因此 $\mathrm{Mds}(x)$ 意指："x 是二十世紀內未曾符號地定義的最小的數".

我們引入下列公式作爲公理：首先是關係 $<(x,y)$ 的基本性質的表達式：

$$(x)\,\overline{<(x,x)},$$

$$(x)(y)(z)(<(x,y)\ \&\ <(y,z)\rightarrow <(x,z)),$$

$$(x)(y)(\equiv(x,y)\vee <(x,y)\vee <(y,x)),$$

$$(Ex)P(x)\rightarrow(Ex)[P(x)\ \&\ (y)(<(y,x)\rightarrow \bar{P}(y))].$$

在這四個公理中，前三個意指：關係 $<(x,y)$ 把整數**排序**，而最後一個公理說，把它們**整序**(**排成良序**). 其次，我們把下面事實的符號表達式作爲公理，即並非所有的數都能夠在 20 世紀內符號地定義

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x),$$

最後，公式 $\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$ 亦作爲公理，它說，有一個 $\mathrm{Mds}(x)$ 的表達式在 20 世紀內寫出來了，而這確是一個眞的斷言，因爲上面我們已經把 $\mathrm{Mds}(x)$ 的表達式寫出來了.

現在我們可以推導下列的形式推理. 在公式

$$(Ex)P(x)\rightarrow(Ex)[P(x)\ \&\ (y)(<(y,x)\rightarrow \bar{P}(y))]$$

中我們把 P 代以 $\overline{\mathrm{Dsc}}$，得

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\rightarrow(Ex)[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ (y)(<(y,x)\rightarrow \mathrm{Dsc}(y))].$$

因爲 $(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x)$ 是眞的，我們得

$$(Ex)[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ (y)(<(y,x)\rightarrow \mathrm{Dsc}(y))],$$

再利用縮寫記號 $\mathrm{Mds}(x)$ 得：

$$(Ex)\mathrm{Mds}(x). \qquad \text{(甲)}$$

根據 Mds 的定義我們有關係式

$$\mathrm{Mds}(x)\rightarrow\overline{\mathrm{Dsc}}(x). \qquad (乙)$$

其次,借助於所建立的公理可以推出公式

$$\mathrm{Mds}(x)\rightarrow\mathrm{Mds}(x)\ \&\ (y)(\mathrm{Mds}(y)\rightarrow\equiv(x,y)),$$

即

$$\mathrm{Mds}(x)\rightarrow\mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x). \qquad (丙)$$

公式丙與乙合併可得

$$\mathrm{Mds}(x)\rightarrow\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x).$$

根據相應於公式(34)的規則我們又得

$$(Ex)\ \mathrm{Mds}\ (x)\rightarrow(Ex)(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x)).$$

因為 $(Ex)\mathrm{Mds}(x)$ 已經證明(按見(甲)),故由蘊涵規則得

$$(Ex)(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x)).$$

若再加入已建立為公理的公式 Scr(Mds),我們得

$$(Ex)(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x)\ \&\ \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\}. \qquad (丁)$$

根據公理 f) 又有公式

$$F(Q)\rightarrow(EP)F(P).$$

如果把 Q 代以 Mds,而 $F(P)$ 代以 $(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(P,x)\ \&\ \mathrm{Scr}(P)\}$,我們便得

$$(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x)\ \&\ \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\}\rightarrow$$
$$\rightarrow(EP)(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(P,x)\ \&\ \mathrm{Scr}(P)\}.$$

因為前件是一個已證公式(丁),故得

$$(EP)(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Df}(P,x)\ \&\ \mathrm{Scr}(P)\}. \qquad (戊)$$

因為前面的量詞可以交換,又因為(按,相應於公式(26′))

$$(EP)\{A\ \&\ F(P)\}\sim A\ \&\ (EP)F(P),$$

故由(戊)得

$$(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ (EP)(\mathrm{Df}(P,x)\ \&\ \mathrm{Scr}(P))\}.$$

若應用縮寫記號 Dsc,這個公式便變成

$$(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\ \&\ \mathrm{Dsc}(x)\}.$$

另一方面，若對公式(21)作代入，我們又可推出公式

$$(x)(\mathrm{Dsc}(x)\vee\overline{\mathrm{Dsc}}(x)).$$

根據對偶原則最後這兩個公式却是彼此否定的．因此我們得到一個矛盾．

對於這些矛盾，我們不能作如下的讓步，即把一些彼此否定的命題的可推出性當作一件事實而承認．只要我們把隨便兩個彼此否定的表達式 $\mathfrak{A}$ 與 $\overline{\mathfrak{A}}$ 都承認為眞的公式，那末，正如我們早已指出過的，整個演算便毫無意義了．

現在我們來看，對於我們演算的結構說，從這些詩論得出什麽推論來呢？第一個詩論很明顯地指出，在本段開首處所描寫的那一種無區別的謂詞概念是不能用的，因為一允許它，我們便把矛盾引進謂詞演算裏了．其餘兩個詩論却另有特性，我們只是為了完備起見才兼列了它們的，它們只是表示某些斷言之間的不可調和性．第二個詩論所表示的是

$$\mathrm{Bh}[(x)(\mathrm{Bh}(X)\rightarrow\overline{X})] \text{ 與 } (X)[\mathrm{Bh}(X)\rightarrow\equiv(X,(Y)(\mathrm{Bh}(Y)\rightarrow\overline{Y}))]$$

之間的不可調和性，第三個詩論所表示的是

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x),\ \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$$

以及

$$(P)\{(Ex)P(x)\rightarrow(Ex)[P(x)\ \&\ (y)(<(y,x)\rightarrow\overline{P}(y))]\}$$

之間的不可調和性．而這些斷言中沒有一個是表示邏輯公式的．因此第二種詩論，又叫做"字義學的詩論"，根本與我們的演算無關，因為用我們的演算並不能把它們的純粹邏輯性表出來．反之，為了它們的部分形式化，我們曾勢必借助於內容上的考慮．因此，就我們的演算而論，我們無需考慮由後面這種矛盾而推得的結論，並且今後我們亦不再深入考慮它們[1]．

---

1) 關於字義學詩論的一個新處理可參看，例如，Tarski, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia Philosophica. Leopoli, 1935.

§5. 層次演算

現在的問題是：把因引入高級謂詞而推廣了的演算來系統地構成．前一節的討論結果給我們指出了，我們不能夠使用無區別的謂詞概念而必須根據謂詞的變目而把它們加以區別．在我們的演算中這便意味着：只有對於同一類的謂詞才能使用公共的謂詞變元．

首先，我們有個體謂詞，並且根據它們的變目的個數而分成不同的種或型．這些謂詞叫做第一層次的謂詞．所謂第二層次的謂詞是指下列的謂詞，它們的空位被個體或第一層次的謂詞填補，並且至少出現一個第一層次的謂詞作爲變目．第二層次的謂詞亦根據它的空位的個數及種類而分成不同的種或型．相應地，我們又得到第三層次、第四層次的謂詞等等．個體變元我們仍用小寫拉丁字母表示，謂詞變元仍用大寫拉丁字母表示．引入每一個謂詞變元時，必須預先準確地給出其型，因爲代入規則必須如下地表述，只有與該變元同型的謂詞才可以代入該變元處．

爲了能夠簡短地表示一謂詞變元的型，我們可用一種簡單的符號．個體變元的型我們記之爲 i．如果一個謂詞變元有 n 個空位，而變目的型相應地爲 $a_1, a_2, \cdots, a_n$：則以 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 記該謂詞變元的型．例如，$((i,i),i)$ 是一個二元的第二層次的謂詞的型，該謂詞的第一變目是一個二元的個體謂詞，而第二個變目是個體．本章 §2 所論述的謂詞中，Sym 有型 $((i,i))$，$0(F)$ 有型 $((i))$，$3(\Phi)$ 有型 $(((i)))$，Imp 有型 $((i),(i))$ 等等．

謂詞的這種層次結構以及建基於它之上的演算乃由懷特黑與羅素在他們的基本著作"數學原理"中首先引入於邏輯界來的．除却用到上述的謂詞的型區別外（簡單類型論），這兩位著者還用到謂詞的更細致的區分，所謂分支類型論．根據後說，我們把一元個體謂詞都算作一個單一的型是不合理的，個體謂詞必須依照它的

定義而再區分.例如,一個借助於某些謂詞的全稱號與存在號而定義的個體謂詞,它的型便比之最簡單級的個體謂詞爲高,後者懷特黑與羅素叫做"直謂的"(prädikative)個體謂詞. 這個分支類型論的建立是爲了顧到字義學悖論而來的. 但這是不必要的,因爲正如我們已經看見的,這種矛盾與廣義謂詞演算無關. 此外它還引起大量的困難,我們在本書的第一版已深入討論過. 尤其是自從簡單層次演算的不矛盾性已經可以用更簡單的方式證明了以後,我們更沒有詳細討論這個理論的需要了.

如果現在我們就要轉到層次演算的詳細結構去, 那末我們還遇到寫法上的一個困難. 要表示一謂詞對一些變目成立,我們以前永遠是如下寫出的: 謂詞之後跟以括號, 其中寫出變目而用逗號分開. 如果謂詞變元的空位只給變元填補,那末這個寫法是足夠的. 但如果其空位由一個特殊的謂詞代入,那可是另一回事了. 例如,設 F 是 $((i))$ 型的謂詞變元, 其空位確定地是留給一個一元個體謂詞的. 又設 G 表示一個二元個體謂詞的變元. 我們可由 G 而作出變元 x 的謂詞如下: $G(x,x)$, $G(x,y)$, $G(y,x)$, 後兩個謂詞均含有參變元 y. 我們不能夠直接表示出, 對於這些謂詞中的某一個言, F 是成立的. 因爲, 如果我們寫爲 $F(G)$, 那末便看不出來, G 是指那一個一元謂詞. 最簡單的方法是利用寫法的更改. 設引入 (i) 型的謂詞變元 H, 那末要表示 F 對上述的謂詞成立,可用下列公式

$$(EH)(F(H) \,\&\, (x)(H(x) \sim G(x,x))),$$
$$(EH)(F(H) \,\&\, (x)(H(x) \sim G(x,y))),$$
$$(EH)(F(H) \,\&\, (x)(H(x) \sim G(y,x))),$$

或公式

$$(H)((x)(H(x) \sim G(x,x)) \rightarrow F(H)),$$
$$(H)((x)(H(x) \sim G(x,y)) \rightarrow F(H)),$$
$$(H)((x)(H(x) \sim G(y,x)) \rightarrow F(H))$$

來表示.

但是我們亦可以再建立一種形式體系，而無須利用寫法的更改. 其優點在於:謂詞變元的代入規則[類似於狹義謂詞演算的規則 $\alpha 3$)]不致於喪失，而層次演算的公理結構可以完全類似於我們熟悉的狹義謂詞演算的結構. 但爲此我們必得把寫法變得稍爲複雜一些. 在上述的情形中,我們可如下進行,即對變元 F 加入一個個體變元 x 作爲足碼. 因此我們用

$$F_x(G(x,x));\ F_x(G(x,y));\ F_x(G(y,x))$$

作爲上述三個命題的符號表達式. 在這三公式中,變元 x 是一個約束變元,因而可改爲同種類的另一個變元. 例如以下三公式

$$F_z(G(z,z));\ F_z(G(z,y));\ F_z(G(y,z))$$

便與以上三公式意義相同.

如果我們想把這個足碼寫法貫徹下去，那末第二層次及高層次的每一個謂詞變元都必得保持一個足碼. 設 F 是這樣的一個 n 項變元. $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是一些變元,它們作爲 F 的變目. 如果 G 中有爲個體變元的,那末可不必列出.

設

$$H_{11},\cdots,H_{1i_1};\ H_{21},\cdots,H_{2i_2};\ \cdots;\ H_{n_1},\cdots,H_{ni_n}$$

爲一些變元,而 $H_{k1},\cdots,H_{ki_k}$ 是作爲 G_k 的變目. 那末 F 便有下列的足碼

$$F_{H_{11},\cdots,H_{1i_1};\ H_{21},\cdots,H_{2i_2};\ \cdots;\ H_{n_1},\cdots,H_{ni_n}}.$$

個別謂詞記號亦然. 今舉一些例子. $\mathrm{Sym}(R)$ 須寫爲 $\mathrm{Sym}_{xy}(R(x,y))$, $\mathrm{Imp}(F,G)$ 須寫爲 $\mathrm{Imp}_{xy}(F(x),G(y))$. 在 §2 中所用的公式 $3(\Phi)$ 須寫爲 $3_F(\Phi(F))$,其中 F 有 (i) 型. 我們看見,足碼寫法給形式體系帶來一個嚴重的負担. 因此在下文我們願意建基於較簡的寫法.

在這些初步的考慮之後，我們便要詳細地建立演算了[1]. 命題變元的使用可以免除. 這的確是可省的,因爲每一個含有命題變元的公式都可換以一個等價的公式,其中沒有命題變元的(見本章 §1). 當然,對於公式的運用還是要根據命題演算的規則的.

首先,我們定義型. 型是經過有限次應用以下規則而得的:

1. i 是一型.

2. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是型,那末 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 亦是一型.

作爲公式的基本成分的是:

1. 命題聯結詞.

2. 變元.

後者是一些大寫拉丁字母而寫有一型於其右上方或上方的. 這時,關於型記號我們通常使用一個簡短寫法,即對於 i 只寫一點,而逗號及最外邊的括號則除去. 例如,(i)型,(i,i)型,$((i))$型,$(i,(i))$型的變元我們縮寫爲 $\dot{F}, \ddot{G}, \overset{(\cdot)}{F}, \overset{\cdot(\cdot)}{H}$. 至於 F^i, G^i 等變元,由於沒有任何括號的緣故,無法實行這樣的縮寫,因此採用縮寫法時我們便改用小寫拉丁字母. 我們把這樣的變元叫做**客體變元**,其餘的叫做**謂詞變元**. 如果同一拉丁字母而標以不同的型號,我們是當作不同的變元看待的.

3. 關於客體變元及謂詞變元的全稱號及存在號, 即是說, 放在括號內的變元或加了 E 以後再放入括號內的變元.

4. 謂詞記號(個別謂詞記號). 表以大寫希臘字母或者大寫拉丁字母後跟以小寫拉丁字母的組合,有時又用其它記號. 它和相應的變元具有相同的型記號. 相應於客體變元的我們有個別客體,以小寫希臘字母或特別的記號而表示之.

5. 括號.

今後如果想表達不確定種類的型, 其準確形狀我們不想給出

[1] 這裏還可參考 A. Church 所給的層次演算的結構. —Church, A.: A formulation of the simple theory of types. Journ. Symb. Logic 5 (1940).

或不能給出,可使用小希臘字母. 這只是爲了使得下列的規則能夠就一切可能的型而表述之故. 在形式體系本身並沒有出現變的類型. 在以後的規則表述中以及以後的討論中,我們永遠只設想非縮寫的型記號,只在實際書寫一公式時才用縮寫記號.

對於公式的構成,我們有下列的規則:

1. 設有一個 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 型的謂詞變元或謂詞記號, 如果在該變元或謂詞記號之後, 作一括號, 放入用逗號分開的依次以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 爲型的變元或個別記號,便變成一公式. 例如, $\overset{(\cdot)}{F}\ (\dot{G},x)$ 爲一公式(譯者按, 照這式子看來, 只寫 $F(\dot{G},x)$ 已很足以表示謂詞 F 的類型了. 所以在謂詞本身及量詞處,其實不必再標出類型記號. 但下文仍按作者原文不改).

今後, 如果一公式含有一變元但不含有該變元所屬的全稱號或存在號,我們便說這變元以自由形式出現於該公式中. 如果最後一條件不滿足,我們便說它以約束形式出現於該公式中.

2. 設有一公式以自由形式含有一個變元,如果我們把這公式前面放置相應的全稱號或存在號,而把該公式用括號括之,我們又得一個新公式. 原公式叫做相應的全稱號或存在號的作用域. 如果該公式的開首處本來有一個全稱號或存在號, 其作用域已延展到整個公式之末,那末該公式無須用括號括之.

3. 如果 $\mathfrak{A}$ 爲一公式,則 $\overline{\mathfrak{A}}$ 亦是一公式.

4. 如果 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 爲公式,並且沒有相同的變元在其中之一處以自由形式出現,而在另一公式處以約束形式出現,那末 $(\mathfrak{A})\ \&\ (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A})\vee(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A})\sim(\mathfrak{B})$ 亦是公式. 有下列情形之一時, $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 外面的括號可以省去:如果 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 中不含有記號 $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$: 或者它們是以否定符號置於上時; 或者它們是以全稱號或存在號開始, 其作用域又延展於整個公式之上時; 或者 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 具有 $\mathfrak{D}\vee\mathfrak{E}$ 之形而構造 $\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ 時; 或者它們是 $\mathfrak{D}\ \&\ \mathfrak{E}$ 之形而構造 $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ 時.

現在我們建立永眞公式的公理系統．我們取下列公式作爲基本公式．

Ⅰ．如果在命題演算的永眞公式中把同一個命題變元處處都代以同一公式，所得的每一個公式都是基本公式．這裏必須注意，通過代入以後必須仍成一個公式．

Ⅱ．每一個形如

$$(X^{\alpha})F^{(\alpha)}(X^{\alpha})\to F^{(\alpha)}(Y^{\alpha}) \qquad (\mathrm{II},1)$$

的公式及形如

$$F^{(\alpha)}(Y^{\alpha})\to(EX^{\alpha})F^{(\alpha)}(X^{\alpha}) \qquad (\mathrm{II},2)$$

的公式都是基本公式．

Ⅲ．每一個形如

$$(X^{\alpha})(EY^{\beta})G^{(\alpha,\beta)}(X^{\alpha},Y^{\beta})\to(EF^{(\alpha,\beta)})[(X^{\alpha})(EY^{\beta})(F^{(\alpha,\beta)}(X^{\alpha},Y^{\beta})\,\&\,\&G^{(\alpha,\beta)}(X^{\alpha},Y^{\beta}))\,\&\,(X^{\alpha})(Y^{\beta})(Z^{\beta})(F^{(\alpha,\beta)}(X^{\alpha},Y^{\beta})\,\&\,F^{(\alpha,\beta)}(X^{\alpha},Z^{\beta})\to\to(T^{(\beta)})(T^{(\beta)}(Y^{\beta})\sim T^{(\beta)}(Z^{\beta})))]$$

的公式是一個基本公式．

這個公式是上面的第二層次謂詞演算中公理 g 的推廣．

Ⅳ．每一個形如

$$(X_1^{\beta_1})\cdots(X_n^{\beta_n})[F^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)}(X_1^{\beta_1},\cdots,X_n^{\beta_n})\sim G^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)}(X_1^{\beta_1},\cdots,X_n^{\beta_n})]\to\to(A^{((\beta_1,\cdots,\beta_n))}(F^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)})\to A^{((\beta_1,\cdots,\beta_n))}(G^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)})).$$

的公式是一個基本公式．　這個外延性基本公式說明，在我們的演算中，一謂詞的所有性質只和它的外延有關而和它的內涵（內容意義——譯者）無關，它相應於集合論中的確定性公理（參見本章，§3）．

Ⅴ．設 $\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 爲一公式，含有自由變元 $X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n}$，但此外不含有其它自由變元．設 $\mathfrak{B}^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}$ 爲一個謂詞記號，不出現於 $\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 中．那末可把

$$\mathfrak{B}^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})\sim\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$$

作爲基本公式而加入．這基本公式 Ⅴ 給出個別謂詞的定義．但必

須注意，每個謂詞記號只允許通過這樣的公式來引入. 此外我們還說，通過這種公式所引入的謂詞記號是依賴於在等式右邊出現的記號. 我們必須建立定義串，使得每個被定義的謂詞都只依賴於定義串中已經先出現的那些謂詞.

現在我們試就基本公式給出一些例子.

a) $\dot{F}(x)\to\dot{F}(x)\vee\overline{\dot{F}(x)}$ 乃基本公式 I 之一例，因爲 $A\to A\vee\overline{A}$ 乃命題演算中的一個永眞公式.

b) $(x)\dot{F}(x)\to\dot{F}(y)$; $(\dot{X})\overset{(\cdot)}{F}(\dot{X})\to\overset{(\cdot)}{F}(\dot{Y})$; $(\ddot{X})\overset{(\cdot\cdot)}{F}(\ddot{X})\to\overset{(\cdot\cdot)}{F}(\ddot{Y})$; $\dot{F}(y)\to(Ex)\dot{F}(x)$; $\overset{(\cdot)}{F}(\dot{Y})\to(E\dot{X})\overset{(\cdot)}{F}(\dot{X})$; $\overset{(\cdot\cdot)}{F}(\ddot{Y})\to(E\ddot{X})\overset{(\cdot\cdot)}{F}(\ddot{X})$ 都是基本公式 II 的例子.

c) 基本公式 III 的最簡單例子是

$$(x)(Ey)\ddot{G}(x,y)\to(E\ddot{F})[(x)(Ey)(\ddot{F}(x,y)\ \&\ \ddot{G}(x,y)\ \&$$
$$\&(x)(y)(z)(\ddot{F}(x,y)\ \&\ \ddot{F}(x,z)\to(\dot{T})(\dot{T}(y)\sim\dot{T}(z)))].$$

d) 基本公式 IV 的例子是:

$$(x)(\dot{G}(x)\sim\dot{H}(x))\to(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{G})\to\overset{(\cdot)}{A}(\dot{H}))$$

及

$$(x)(y)(\ddot{G}(x,y)\sim\ddot{H}(x,y))\to(\overset{(\cdot\cdot)}{A}(\ddot{G})\to\overset{(\cdot\cdot)}{A}(\ddot{H})).$$

e) 定義式的例子是

$$\ddot{\equiv}(x,y)\sim(\dot{F})(\dot{F}(x)\sim\dot{F}(y)),$$
$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot{F},\dot{G})\sim(\overset{(\cdot)}{A})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{F})\sim\overset{(\cdot)}{A}(\dot{G})),$$
$$\overset{(\cdot\cdot)}{\mathrm{Ref}}(\ddot{F})\sim(x)\ddot{F}(x,x),$$
$$\overset{(\cdot\cdot)}{\mathrm{Sym}}(\ddot{F})\sim(x)(y)(\ddot{F}(x,y)\to\ddot{F}(y,x)),$$
$$\overset{(\cdot\cdot)}{\mathrm{Tr}}(\ddot{F})\sim(x)(y)(z)(\ddot{F}(x,y)\ \&\ \ddot{F}(y,z)\to\ddot{F}(x,z)),$$
$$\overset{((\cdot))((\cdot))}{\mathrm{Imp}}(\overset{(\cdot)}{F},\overset{(\cdot)}{G})\sim(\dot{X})(\overset{(\cdot)}{F}(\dot{X})\to\overset{(\cdot)}{G}(\dot{X})).$$

這裏必須注意，在演算的實際使用中，對於謂詞記號一般說來是省去型記號的，但當同一記號而用於不同層次的謂詞時，例如在 $\equiv$ 的情形時，型記號絕不能省去.

現在我們給出**推演規則**.

$\alpha 1$）一個自由變元可代以同型的變元或個別記號，只須在這個變元出現的各處都同時代入．如果代入以一個變元，則新變元必須在原來公式中不以約束形式而出現．

$\alpha 2$）設 $\mathfrak{A}$ 是一個已推出的公式，其中有一個謂詞變元以自由形式出現，設爲 $F^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}$，而且它出現的每一處，其各空位都填以變元或個別記號．再設 $\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 爲一個公式，在其中變元 $X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n}$ 以自由形式而出現，而在 $\mathfrak{B}$ 中其它的以自由形式出現的變元不在 $\mathfrak{A}$ 中以約束形式而出現．此外，在 $\mathfrak{A}$ 中各處的 $F^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}$ 的空位處所填着的變元不應該在 $\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 中以約束形式而出現．這時我們可用下列方法從 $\mathfrak{A}$ 而得出一個可推出的公式：依照假設，在 $\mathfrak{A}$ 中某處出現的變元 $F^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}$ 其變元空位處填着 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 型的變元或個別記號，設填以 $\mathfrak{A}_1^{\alpha_1},\cdots,\mathfrak{A}_n^{\alpha_n}$．這些 $\mathfrak{A}_i^{\alpha_i}$ 不必彼此互異，它們可以部分地或整個地是同一的記號．今在 $F^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}(\mathfrak{A}_1^{\alpha_1},\cdots\mathfrak{A}_n^{\alpha_n})$ 的相應出現處代以 $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_1^{\alpha_1},\cdots,\mathfrak{A}_n^{\alpha_n})$，後者如下得到，在 $\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 中凡變元 $X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n}$ 出現處都分別地代以 $\mathfrak{A}_1^{\alpha_1},\cdots,\mathfrak{A}_n^{\alpha_n}$．相應的代入必須在 $F^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}$ 的每一個出現處都同時實行．有時，在代入時還須把 $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_1^{\alpha_1},\cdots,\mathfrak{A}_n^{\alpha_n})$ 加上括號，因爲節省括號的條件可能在實行代入時消失，卽當代入後可能根本不成其爲公式，或者 $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_1^{\alpha_1},\cdots,\mathfrak{A}_n^{\alpha_n})$ 根本不成其爲全式的部分公式，卽根據公式的構成規則不能由 $\mathfrak{B}$ 而構成公式時．例如，設公式 $\mathfrak{A}$ 爲 $\dot{F}(x)\ \&\ \dot{H}(x)$，如果想對 $\dot{F}(x)$ 代入以公式 $\dot{G}(x)\to\dot{H}(x)$，那末代入後便得 $(\dot{G}(x)\to\dot{H}(x))\ \&\ \dot{H}(x)$．反之，如果想代入以 $\dot{G}(x)\vee\dot{H}(x)$，那末代入後便得 $\dot{G}(x)\vee\dot{H}(x)\ \&\ \dot{H}(x)$．**爲了使得自由變元與約束變元不致於混淆起見，根本只有當代入後仍然成一公式時，代入才被允許．**

β）由兩公式 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$（相應地，由 $(\mathfrak{A})\to\mathfrak{B}$ 或 $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B})$ 或 $(\mathfrak{A})\to(\mathfrak{B})$）可得一新公式 $\mathfrak{B}$．

$\gamma 1$）如果我們有一公式 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(F^{\alpha})$ 或 $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}(F^{\alpha}))$，其中 F^{α} 以

自由形式出現於 $\mathfrak{B}(F^a)$ 中,反之,在 $\mathfrak{A}$ 中變元 F^a 並不出現. 那末我們可把 $\mathfrak{A}\rightarrow(F^a)\mathfrak{B}(F^a)$ 或 $\mathfrak{A}\rightarrow(F^a)(\mathfrak{B}(F^a))$ 作爲一個新的可推公式.

$\gamma 2$) 設 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}(F^a)$ 滿足以上規則所列的條件,則由可證公式 $\mathfrak{B}(F^a)\rightarrow\mathfrak{A}$ 或 $(\mathfrak{B}(F^a))\rightarrow\mathfrak{A}$ 可得一新的可推公式 $(EF^a)\mathfrak{B}(F^a)\rightarrow\mathfrak{A}$ 或 $(EF^a)(\mathfrak{B}(F^a))\rightarrow\mathfrak{A}$.

δ) 在一公式中我們可把一個約束變元改爲另外一個同型的約束變元. 這個改名須在作用域內處處以及相應的全稱號內或存在號內實行. 這時還須假定,改名後仍然是一個公式. 如果想改名的變元出現多次,卽有多個作用域,那末這改名可只就一個作用域實行便成.

爲書寫方便起見,我們還需要若干縮寫. 設 $\dot{\mathfrak{A}}$ 爲一個$((i))$型的謂詞變元或謂詞記號. $\mathfrak{B}(x)$ 爲一個含有自由變元 x 的公式. $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}_x(\mathfrak{B}(x))$ 將是 $(E\dot{G})(\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G})\&(x)(\mathfrak{B}(x)\sim\dot{G}(x)))$ 的方便寫法. 又 $\overset{(\cdot\cdot)}{\mathfrak{A}}_{xy}(\mathfrak{B}(x,y))$ 爲 $(E\ddot{G})(\overset{(\cdot\cdot)}{\mathfrak{A}}(\ddot{G})\ \&\ (x)(y)(\mathfrak{B}(x,y)\sim\ddot{G}(x,y)))$ 的縮寫等等. 其它相似的寫法,相應於上面所論述的足碼寫法,可根據需要而引入.

現在可證明下列各公式.

a) $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}_x(\dot{F}(x))\sim\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F})$.

b) 由 $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F})$ 可推出 $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}_x(\mathfrak{B}(x))$.

c) $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}_x(\mathfrak{B}(x))\rightarrow(E\dot{G})\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G})$.

公式 a) 寫出來後便是

$$(E\dot{G})(\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G})\ \&\ (x)(\dot{F}(x)\sim\dot{G}(x))\sim\dot{\mathfrak{A}}(\dot{F}).$$

但基本公式 IV 有一個是

$$(x)(\dot{G}(x)\sim\dot{F}(x))\rightarrow(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{F})\rightarrow\overset{(\cdot)}{A}(\dot{G})).$$

根據命題演算的規則而變形我們有

$$\overset{(\cdot)}{A}(\dot{F})\ \&\ (x)(\dot{G}(x)\sim\dot{F}(x))\rightarrow\overset{(\cdot)}{A}(\dot{G}).$$

再根據規則 $\gamma 2$) 得

$$(E\dot{F})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{F}) \,\&\, (x)(\dot{G}(x) \sim \dot{F}(x))) \rightarrow \overset{(\cdot)}{A}(\dot{G}).$$

經過改名與代入,我們可把變元交換,因此得

$$(E\dot{G})(\dot{A}(\dot{G}) \,\&\, (x)(\dot{F}(x) \sim \dot{G}(x))) \rightarrow \overset{(\cdot)}{A}(\dot{F})^{*}.$$

[譯者按,在 * 中把 A 代以 $\mathfrak{A}$ 後,便得到公式 a) 的前一半.] 其次,作爲基本公式 I 有 $\dot{F}(x) \sim \dot{F}(x)$. 借助於規則 $\gamma 1$) 得 $(x)(\dot{F}(x) \sim \dot{F}(x))$;根據命題演算更得

$$\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}) \rightarrow \overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}) \,\&\, (x)(\dot{F}(x) \sim \dot{F}(x))^{**}.$$

若對基本公式 $\overset{(\cdot)}{A}(\dot{F}) \rightarrow (E\dot{G})\overset{(\cdot)}{A}(\dot{G})$ 作代入,我們得

$$\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}) \& (x)(\dot{H}(x) \sim \dot{F}(x)) \rightarrow (E\dot{G})(\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G}) \,\&\, (x)(\dot{H}(x) \sim \dot{G}(x))),$$

這裏若把 $\dot{H}$ 代以 $\dot{F}$ 得

$$\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}) \,\&\, (x)(\dot{F}(x) \sim \dot{F}(x)) \rightarrow (E\dot{G})(\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G}) \,\&\, (x)(\dot{F}(x) \sim \dot{G}(x))).$$

由本公式與公式 ** 再根據命題演算得

$$\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(F) \rightarrow (E\dot{G})(\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G}) \,\&\, (x)(\dot{F}(x) \sim \dot{G}(x)).$$

這是公式 a) 的另一半. 故根據命題演算我們便得公式 a).

對於 b) 言,由 $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F})$ 先根據公式 a) 得 $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}_x(\dot{F}(x))$, 再根據規則 $\alpha 2$) 得 $\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}_x(\mathfrak{B}(x))$.

公式 c) 寫出後便是

$$(E\dot{G})(\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G}) \,\&\, (x)(\mathfrak{B}(x) \sim \dot{G}(x))) \rightarrow (E\dot{G})(\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G})).$$

基本公式 I 之一是:

$$\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}) \,\&\, (x)(\mathfrak{B}(x) \sim \dot{F}(x)) \rightarrow \overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}).$$

由基本公式 II 作代入可得

$$\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}) \rightarrow (E\dot{G})\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G}).$$

這兩式合併可得

$$\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{F}) \,\&\, (x)(\mathfrak{B}(x) \sim \dot{F}(x)) \rightarrow (E\dot{G})\overset{(\cdot)}{\mathfrak{A}}(\dot{G})$$

根據規則 $\gamma 2$) 及 δ) 便得到公式 c).

要對這公理系統所推出的公式的一部分有一定的鳥瞰起見,

下面的注意是很重要的，卽狹義謂詞演算的基本公式和推理規則在我們的系統中仍然成立，因此那裏所推出的每一個公式在這裏全部成立，不過現在寫出公式時，我們要對謂詞變元配備以一點或多點．又因爲相應的基本公式及推理規則對於高型變元仍然成立，所以相應的高層次的公式亦可以推出． 例如，由剛才所說那種推出公式中，如果把其中個體變元改爲 α 型變元，把其中謂詞變元 $\dot{F}, \dot{G}, \dot{H}$ 等改爲謂詞變元 $F^{(\alpha)}, G^{(\alpha)}, H^{(\alpha,\alpha)}$ 等，我們仍得一個可推公式．我們只須把狹義謂詞演算中相應公式的證明作適當的改變便成了． 例如，狹義謂詞演算中的可推公式（第三章，§6 公式(36)）

$$(Ex)(y)F(x,y)\rightarrow(y)(Ex)F(x,y)$$

不但對應於公式

$$(Ex)(y)\ddot{F}(x,y)\rightarrow(y)(Ex)\ddot{F}(x,y),$$

而且還對應於，比如說，下列公式

$$(E\dot{X})(\dot{Y})\overset{(\cdot)(\cdot)}{F}(\dot{X},\dot{Y})\rightarrow(\dot{Y})(E\dot{X})\overset{(\cdot)(\cdot)}{F}(\dot{X},\dot{Y}).$$

在對各個個體變元作代入從而得出層次演算中的相應公式時，甚至於還無需要求，必須全代以同型的變元，這對狹義謂詞演算中大多數的公式均如此．例如，只須適當地把證明更改便可得出

$$(Ex)(\dot{Y})\overset{\cdot(\cdot)}{F}(x,\dot{Y})\rightarrow(\dot{Y})(Ex)\overset{\cdot(\cdot)}{F}(x,\dot{Y}).$$

當然能夠與狹義謂詞演算相對應的公式並未窮盡這系統中一切可推出的公式，因爲我們已有一些基本公式，它們並不對應於狹義謂詞演算中的任何公式．

當通過定義而引入個別謂詞時，在每個複雜公式中被定義式均可用定義式來替換這一點是很爲重要的．這可由下列的**替換規**則而得到保證，這規則與第三章 §7 所提到的替換規則相似：

設 $\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 與 $\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 爲兩公式，含有自由變元 $X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n}$，但沒有其它的自由變元．又設

$$\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})\sim\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$$

爲一可證公式. 再設 $\mathfrak{C}$ 爲一公式, 含有部分公式 $\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$. 設把這部分公式代以 $\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 而使 $\mathfrak{C}$ 變成 $\mathfrak{C}'$. 那就可以斷言說, $\mathfrak{C}\sim\mathfrak{C}'$ 亦是一個可證公式(須假設 $\mathfrak{C}'$ 仍是一公式). 只要把約束變元適當地改名, 那末 $\mathfrak{C}'$ 爲一公式這一點永遠可以辦到.

我們可根據 $\mathfrak{C}$ 與 $\mathfrak{C}'$ 中的部分公式的個數而歸納地證明這定理, 但計算個數時, $\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 與 $\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$ 的眞部分公式不必計入(這樣一來可使 $\mathfrak{C}$ 與 $\mathfrak{C}'$ 的部分公式個數相同). 如果部分公式個數是 1, 那末 $\mathfrak{C}\sim\mathfrak{C}'$ 全同於 $\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})\sim\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$, 根據假設, 我們的斷言是眞的. 至於由 n 至 $n+1$ 的推論, 可仿第三章 §7 證明規則 IX 時的方法來證明, 並注意下列情況, 那裏所用的規則及可證公式對於現在考慮中的所有各型都是成立的. 還可注意, 在 $\mathfrak{C}$ 中出現的部分公式 $\mathfrak{A}(\cdots)$, 不必恰巧便是含有變元 $X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n}$. 如果在 $\mathfrak{C}$ 中把一個部分公式 $\mathfrak{A}(Y_1^{\alpha_1},\cdots,Y_n^{\alpha_n})$ 換爲 $\mathfrak{B}(Y_1^{\alpha_1},\cdots,Y_n^{\alpha_n})$, 這定理仍然是成立的, 因爲由 $\mathfrak{A}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})\sim\mathfrak{B}(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_n^{\alpha_n})$, 經過代入立可得 $\mathfrak{A}(Y_1^{\alpha_1},\cdots,Y_n^{\alpha_n})\sim\mathfrak{B}(Y_1^{\alpha_1},\cdots,Y_n^{\alpha_n})$.

還須注意的, 這個公理系統並沒有給出一切永眞公式, 事實上亦不可能存在有一個具這種完備性的公理系統[1]. 這倒不是因爲在推出永眞公式時永遠需要新原理及新基本思考, 而倒是因爲當證明某一層次的永眞公式時需要更高層次的永眞公式. 例如, 下面我們可以證明, 在第二層次謂詞演算中作爲基本公式的某一個公式, 在層次演算中却是可以證明的. 但是我們所建立的層次演算却絕不是最後的結束. 因爲我們可以把第幾層次所對應的序數延伸到第二類序數去. 不過這樣的延伸這裏不再討論.

現在我們詳細一些討論上面提到的關於第二層次謂詞演算的話. 試比較這裏的公理系統以及上面所建立的第二層次謂詞演算的公理系統, 我們便看見, 那裏的基本公式 h) 並沒有推廣到這裏

1) 這由本章 §1, 腳註 1 所引的哥德爾著作可以知道.

來．這個推廣將是：

$$(X^{\alpha})(EF^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)})A^{(\alpha,(\beta_1,\cdots,\beta_n))}(X^{\alpha},F^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)})\rightarrow$$
$$\rightarrow(EG^{(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_n)})(X^{\alpha})(EF^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)})\{(Y_1^{\beta_1})\cdots(Y_n^{\beta_n})(F^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)}(Y_1^{\beta_1},\cdots,Y_n^{\beta_n})\sim G^{(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_n)}(X^{\alpha},Y_1^{\beta_1},\cdots,Y_n^{\beta_n}))\ \&\ A^{(\alpha,(\beta_1,\cdots,\beta_n))}(X^{\alpha},F^{(\beta_1,\cdots,\beta_n)})\}.$$

第二層次謂詞演算的公理 h) 則相應於下列的特例：

$$(x)(E\dot{F})\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})\rightarrow(E\ddot{G})(x)(E\dot{F})((y)(\dot{F}(y)\sim\ddot{G}(x,y))\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})).$$

如果 F 具有多個空位時則相應於類似的式子．這些公式都不必作爲基本公式，因爲，儘管在第二層次演算中，由於人們不能處理所需要的變元種類之故而不能證明，但現在却是可證明的了．

我們可以只證明後面的特例，因爲對其它的情形亦可用同法證明[1]．首先引入謂詞記號 Eind 如下

$$\mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{A})\sim(x)(\dot{F})(\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{G})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot{F},\dot{G})).$$

這裏，$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}$ 則如下定義：

$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot{F},\dot{G})\sim(\overset{(\cdot)}{A})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{F})\sim\overset{(\cdot)}{A}(\dot{G})).$$

那末我們便可證明

$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot{F},\dot{G})\ \&\ \overset{(\cdot)}{B}(\dot{G})\rightarrow\overset{(\cdot)}{B}(\dot{F}).\qquad\text{（甲）}$$

因爲，由基本公式 $(\overset{(\cdot)}{X})\overset{((\cdot))}{F}(\overset{(\cdot)}{X})\rightarrow\overset{((\cdot))}{F}(\overset{(\cdot)}{Y})$，再根據規則 $\alpha 1)$ 及 $\delta)$ 作代入及變元改名後便得

$$(\overset{(\cdot)}{A})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{F})\sim\overset{(\cdot)}{A}(\dot{G}))\rightarrow(\overset{(\cdot)}{B}(\dot{F})\sim\overset{(\cdot)}{B}(\dot{G})).$$

再根據定義及命題演算便得斷言（甲）．其次

$$\mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{A})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{G})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot{F},\dot{G})\qquad\text{（乙）}$$

亦是可證的，這由 Eind 的定義用相似的方法而得．又根據命題演算可證

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\rightarrow(\dot{F}(y)\rightarrow(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\&\dot{F}(y))),\qquad\text{（丙）}$$

再由基本公式 II 作代入得

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\ \&\ \dot{F}(y)\rightarrow(E\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\ \&\ \dot{G}(y)).\qquad\text{（丁）}$$

---

1) 下述證明的基本思想當本書 2 版完稿時已由 P. Bernays 先生告知作者．

(丙),(丁)合併再根據命題演算可得

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\to(\dot F(y)\to(E\dot G)(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y)))^{*}.$$

應用我們對於 Eind 所給出的公式(乙)及命題演算公式得

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y)\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot F,\dot G)\ \&\ \dot G(y).\qquad(戊)$$

由上面已得出的公式(甲)即

$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot F,\dot G)\ \&\ \overset{(\cdot)}{B}(\dot G)\to\overset{(\cdot)}{B}(\dot F)$$

作代入,可得公式

$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot F,\dot G)\ \&\ \dot G(y)\to\dot F(y).\qquad(己)$$

因此由(戊)(己)可得

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y)\to\dot F(y).$$

根據命題演算的規則可把這公式變形爲

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y)\to(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\to\dot F(y)).$$

根據規則 $\gamma2$) 我們再得

$$(E\dot G)(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y))\to(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\to\dot F(y)).$$

根據命題演算把最後一公式變形可得

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\to((E\dot G)(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y))\to\dot F(y)).$$

由最後這公式及公式(*)可得

$$\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\to((E\dot G)(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y))\sim\dot F(y)).$$

這裏根據規則 $\gamma1$) 把 (y) 放在後件的前面，再根據命題演算而變形便得

$$\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot F)\&\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F)\&\mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\to(y(\dot F(y)\sim(E\dot G)(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,G)\&\dot G(y)))\&\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot F).$$

由最後這公式應用基本公式 II 與 I,並根據規則 $\gamma1$) 與 $\gamma2$) 得

$$(x)(E\dot F)(\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot F)\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot F))\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\to$$
$$\to(x)(E\dot F)[(y)(\dot F(y)\sim(E\dot G)(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot G)\ \&\ \dot G(y)))\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot F)].^{**}$$

由基本公式 II, 2 根據 $\alpha1$) 與 δ) 而作變元改名便得公式 $\overset{(\cdot\cdot)}{A}(\ddot C)\to$ $\to(E\ddot H)\overset{(\cdot\cdot)}{A}(\ddot H)$,作代入便得

$$(x)(E\dot F)[(y)(\dot F(y)\sim\ddot C(x,y))\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot F)]\to$$
$$\to(E\ddot H)(x)(E\dot F)[(y)(\dot F(y)\sim\ddot H(x,y))\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot F)].$$

根據規則 $\alpha 2$) 把 $\ddot{C}(x,y)$ 代以 $(E\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\&\dot{G}(y))$,再與 (**) 合併可得

$$(x)(E\dot{F})(\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F}))\ \&\ \mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B})\rightarrow$$
$$\rightarrow(E\ddot{H})(x)(E\dot{F})[(y)(\dot{F}(y)\sim\ddot{H}(x,y))\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})]^{***}.$$

由 $\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}$ 的定義及命題演算立刻可以得出

$$(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\&\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\rightarrow(\overset{(\cdot)}{T})(\overset{(\cdot)}{T}(\dot{F})\sim\overset{(\cdot)}{T}(\dot{G})))\rightarrow(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\&\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot{F},\dot{G})).$$

由此再應用基本公式 II,1 與規則 $\gamma 1$) 可得

$$(x)(\dot{F})(\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\rightarrow(\overset{(\cdot)}{T})(\overset{(\cdot)}{T}(\dot{F})\sim\overset{(\cdot)}{T}(\dot{G})))\rightarrow$$
$$\rightarrow(x)(\dot{F})(\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\equiv}(\dot{F},\dot{G})).$$

再應用 Eind 的定義可得

$$(x)(\dot{F})(\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\rightarrow(\overset{(\cdot)}{T})(\overset{(\cdot)}{T}(\dot{F})(\sim\overset{(\cdot)}{T}(\dot{G})))\rightarrow\mathrm{Eind}(\overset{\cdot(\cdot)}{B}),$$

由此及(***)再應用命題演算可得

$$(x)(E\dot{F})(\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F}))\ \&\ (x)(\dot{F})(\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\rightarrow$$
$$\rightarrow(\overset{(\cdot)}{T})(\overset{(\cdot)}{T}(\dot{F})\sim(\overset{(\cdot)}{T}(\dot{G})))\rightarrow(E\ddot{H})(x)(E\dot{F})((y)(\dot{F}(y)\sim\ddot{H}(x,y))\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})).$$

這裏可根據規則 $\gamma 2$) 把 $(E\overset{\cdot(\cdot)}{B})$ 放在蘊涵式的前件的前面 [譯者按,結果呈 $(E\overset{\cdot(\cdot)}{B})((x)(E\dot{F})\mathfrak{A}\ \&\ (x)(\dot{F})(\dot{G})\mathfrak{B})\rightarrow(E\ddot{H})(x)(E\dot{F})\mathfrak{C}$ 形, 姑名之爲(庚)]. 根據基本公式 III 經過變元代入可得

$$(x)(E\dot{F})\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})\rightarrow(E\overset{\cdot(\cdot)}{B})\{(x)(E\dot{F})(\overset{\cdot(\cdot)}{A}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F}))\ \&$$
$$\&(x)(\dot{F})(\dot{G})(\overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{F})\ \&\ \overset{\cdot(\cdot)}{B}(x,\dot{G})\rightarrow(\overset{(\cdot)}{T})(\overset{(\cdot)}{T}(\dot{F})\sim\overset{(\cdot)}{T}(\dot{G}))). \qquad (辛)$$

把這兩公式(庚),(辛)合併,再作變元改名,卽得我們的斷言.

該公理系統的其它推理可見於下一節中.

若推廣第二章 §9 所用的方法,層次演算的不矛盾性可很簡單地得到證明[1].

---

1) 參見 A. Tarski: Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit. Mh. Math. Physik, Bd. (40) (1933). Gentzen, G.: Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik. Math. Zeitschr., Bd. 41 (1936).

§6. 層次演算的應用

當由某一理論內的公理導出推論時,層次演算亦極有用處,其方式正如在第三章 §11 內對狹義謂詞演算所詳細敍述的那樣. 這時,需把這些公理作爲新的基本公式加到層次演算的邏輯基本公式上去. 用前章基本公式V而定義的個别謂詞現在還須增加一些新的個别謂詞,它們以新增加的公理作爲隱定義的. 與狹義謂詞演算不同的是,關於公理及結論方面現在有一個廣泛的表達可能性. 我們現在想用一個例子來說明層次演算的應用.

爲此,我們試討論實數論基礎內的一些片段. 這裏,實數並不是通過適當的公理系統而引入的,它是化歸到有理數去的. 因此,我們把有理數當作個體域內的客體. 算術的基本關係如加法、乘法、大小關係等可通過適當的公理而引入,不過我們不預備寫出,因爲在後面並不用到. 對於"x 小於 y"我們用記號 $<(x,y)$ 表示. 要把實數化歸到有理數去,在數學中曾使用種種不同的方法. 例如,可借助於康托的基本數列而定義一實數或借助於一個無窮十進小數或二進小數來定義. 但與邏輯相連系時最適當的是狄德金(Dedekind)的方法.

狄德金把實數定義爲一"分割",卽把有理數劃分成兩類的一種分法,而具有下述的"分割性質":

1. 兩類中每一類至少含有一個有理數.

2. 第一類中沒有最大的有理數.

3. 如果一有理數屬於第一類,那末所有更小的有理數亦屬於第一類.

在上述這種區分中,我們永遠只須考慮兩類中的第一類,並把它看作一個有理數集,它借助於定義它的謂詞來表示.

因此,我們把一實數理解爲有理數集,它有一個定義謂詞 $\dot{P}$, $\dot{P}$ 須滿足下列三個條件:

1. $(Ex)\dot{P}(x)\ \&\ (Ex)\overline{\dot{P}(x)}$

("通過 $\dot{P}(x)$ 及 $\overline{\dot{P}(x)}$ 所確定的兩類都不是空的").

2. $(x)\{\dot{P}(x)\rightarrow(Ey)(<(x,y)\ \&\ \dot{P}(y))\}$

("對於每一個具有性質 $\dot{P}$ 的有理數,都有一個更大的數,也具有性質 $\dot{P}$").

3. $(x)\{\dot{P}(x)\rightarrow(y)(<(y,x)\rightarrow\dot{P}(y))\}$

("如果 x 具有性質 $\dot{P}$,那末所有的更小的有理數也具有性質 $\dot{P}$").

現在我們用下式定義一個個別謂詞

$$\mathrm{Sc}(\dot{P})\sim 1.\ \&\ 2.\ \&\ 3.,$$

這裏 1., 2., 3. 乃指上面給以這樣編號的三個公式. $\mathrm{Sc}(\dot{P})$ 意指:"$\dot{P}$ 表示一實數."

我們用下式引入謂詞 $\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}$,從而定義實數間的大小關係

$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{P},\dot{Q})\sim(x)(\dot{P}(x)\rightarrow\dot{Q}(x)).$$

再用下式定義謂詞 Mr:

$$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\sim(\dot{P})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\rightarrow\mathrm{Sc}(\dot{P}))\ \&\ (E\dot{P})\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P}).$$

$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})$ 意指:"$\overset{(\cdot)}{A}$ 表示實數的一個(不空)集."

對一實數集言,如果有一實數大於或等於該集中每一數,我們便說這集界於上. 因此我們用下式引入一個個別謂詞 Sch:

$$\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\sim\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P})\&(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{P})),$$

$\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})$ 意指:$\overset{(\cdot)}{A}$ 是一個實數集,而 $\dot{P}$ 爲這集的上界.

就實數論基礎言,非常重要的是證明下述的定理:如果一個實數集有一上界,它便有一上確界,即有最小的上界.

我們想對這個定理給出證明,從而證實層次演算的推理能力. 符號地表述這定理:

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(E\dot{P})\{\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\&(\dot{R})(\mathrm{Sc}(\dot{R})\&\mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{P},\dot{R}))\}.$$

上確界存在性的數學證明,如果寫成最簡單的形式便是:對所考慮的一集實數(實際上是一集的(一堆的)第一層次的集)作出其

併集. 根據本章 §3 的注意與 $\overset{(\cdot)}{A}$ 相應的併集可用謂詞 $(E\dot{P})(\dot{P}(x)\&\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P}))$ 來表示. 我們的證明便在於指出，這個謂詞表示一個實數，它正是集 $\overset{(\cdot)}{A}$ 的上確界（譯者按，在分支類型論中，因爲併集的定義式中含有 $(E\dot{P})$，故這個併集的定義謂詞不能表示實數，這是分支類型論的困難之點).

首先，我們用下式引入一個個別謂詞 Vg

$$\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\sim(E\dot{P})(\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P})).$$

（譯者按，$\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})$ 意指: "x 爲 $\overset{(\cdot)}{A}$ 的併集中某一元素（實數）的元素".）

下面公式是基本公式 I 中的一個:

$$\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ (\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\mathrm{Sc}(\dot{Q}))\to\mathrm{Sc}(\dot{Q})\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q}).$$

由基本公式 II 作代入得公式

$$(\dot{P})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to\mathrm{Sc}(\dot{P}))\to(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\mathrm{Sc}(\dot{Q})),$$

根據 Sc 的定義可得公式

$$\mathrm{Sc}(\dot{Q})\to(Ex)\dot{Q}(x)\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q}),$$

把這三公式合併得

$$\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to((\dot{P})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to\mathrm{Sc}(\dot{P}))\to(Ex)\dot{Q}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q}).\qquad(\text{子})$$

由基本公式 II 作代入得公式

$$(Ex)\dot{Q}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})\to(E\dot{P})((Ex)\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P})),\qquad(\text{丑})$$

由（子）（丑）並使用規則 $\gamma 2$）可得

$$(E\dot{P})\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to((\dot{P})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to\mathrm{Sc}(\dot{P}))\to(E\dot{P})((Ex)\dot{P}(x)\&\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\mathrm{Sc}(\dot{P})).\qquad(\text{寅})$$

又因

$$(Ex)\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P})\to(Ex)(\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P}))$$

是可推出的（參見第三章 §8 公式(26′)），再應用規則 γ' 及公式(34)，又得

$$(E\dot{P})((Ex)\dot{P}(x)\&\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\mathrm{Sc}(\dot{P}))\to(E\dot{P})(Ex)(\dot{P}(x)\&\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\mathrm{Sc}(\dot{P})).\qquad(\text{卯})$$

因

$$(E\dot{P})(Ex)(\dot{P}(x)\&\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\mathrm{Sc}(\dot{P}))\to(Ex)(E\dot{P})(\dot{P}(x)\&\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\mathrm{Sc}(\dot{P})).\qquad\text{(辰)}$$

(參見第三章 §8 公式(29′))之故，由(寅)，(卯)，(辰)可得

$$(E\dot{P})\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&(\dot{P})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to\mathrm{Sc}(\dot{P}))\to(Ex)(E\dot{P})(\dot{P}(x)\&\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\mathrm{Sc}(\dot{P})).$$

若考慮到 Mr 與 Vg 的定義，我們得

$$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\to(Ex)\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A}).\qquad(1)$$

由 Sch 及 Sc 的定義得

$$\mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\to\mathrm{Sc}(\dot{R})\&(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R})),$$

$$\mathrm{Sc}(\dot{R})\to(Ex)\overline{\dot{R}(x)},$$

故得

$$\mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\to(Ex)\overline{\dot{R}(x)}\&(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\qquad\text{(巳)}$$

根據 $\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}$ 的定義，我們得

$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{P},\dot{R})\to(\dot{P}(y)\to\dot{R}(y)),$$

或者根據命題演算而作變形後，得

$$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{P},\dot{R})\to(\overline{\dot{R}(y)}\to\overline{\dot{P}(y)}),$$

故得

$$(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{P},\dot{R}))\to(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to(\overline{\dot{R}(y)}\to\overline{\dot{P}(y)})).$$

再與基本公式 II 之一合併得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\to(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to(\overline{\dot{R}(y)}\to\overline{\dot{P}(y)})).$$

再交換前提得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\to(\overline{\dot{R}(y)}\to(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\to\overline{\dot{P}(y)})).$$

經過命題演算的變形得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\to(\overline{\dot{R}(y)}\to\overline{\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\dot{P}(y)\&\mathrm{Sc}(\dot{P})}).$$

再應用規則 γ1) 得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\to(\overline{\dot{R}(y)}\to(\dot{P})\overline{(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\dot{P}(y)\&\mathrm{Sc}(\dot{P}))}),$$

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\to(\overline{\dot{R}(y)}\to\overline{(E\dot{P})}(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\&\dot{P}(y)\&\mathrm{Sc}(\dot{P})))$$

(參見第三章 §6，公式 33d))。

再應用規則 γ1) 得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leq}(\dot{Q},\dot{R}))\rightarrow(x)(\overline{\dot{R}(x)}\rightarrow\overline{(E\dot{P})}(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\dot{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P}))).$$

把這公式與公式(巳)合併可得

$$\mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(Ex)\overline{\dot{R}(x)}\,\&\,(x)(\overline{\dot{R}(x)}\rightarrow\overline{(E\dot{P})}(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\dot{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})))\quad(\text{午})$$

根據公式(34)，76 頁，我們得

$$(x)(\overline{\dot{R}(x)}\rightarrow\overline{(E\dot{P})}(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\dot{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})))\rightarrow$$
$$\rightarrow((Ex)\overline{\dot{R}(x)}\rightarrow(Ex)\overline{(E\dot{P})}(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\dot{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P}))).$$

把這公式與公式(午)合併得

$$\mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(Ex)\overline{(E\dot{P})}(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\dot{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})).$$

由此根據規則 $\gamma 2$) 並顧到 Vg 的定義，可得

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\overline{(Ex)\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})}.\qquad(2)$$

其次，由 Sc 的定義得

$$\mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow(x)(\dot{P}(x)\rightarrow(Ez)(<(x,z)\,\&\,\dot{P}(z))).$$

或者應用基本公式 II 之一得

$$\mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow(\dot{P}(y)\rightarrow(Ez)(<(y,z)\,\&\,\dot{P}(z))).$$

經過命題演算的變形得

$$\dot{P}(y)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow(Ez)(<(y,z)\,\&\,\dot{P}(z))\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P}),$$

再得

$$\dot{P}(y)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow(Ez)(<(y,z)\,\&\,\dot{P}(z)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P}))\quad(\text{未})$$

(參看公式 26′，81 頁)．若對基本公式 II 之一作代入可得

$$\dot{P}(z)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow(E\dot{Q})(\dot{Q}(z)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{Q}))$$

由此又得

$$<(y,z)\,\&\,\dot{P}(z)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow\,<(y,z)\,\&\,(E\dot{Q})(\dot{Q}(z)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{Q}))$$

或

$$<(y,z)\,\&\,\dot{P}(z)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow\,<(y,z)\,\&\,\mathrm{Vg}(z,\overset{(\cdot)}{A}).$$

因可把 (Ez) 同時放在一蘊涵式的前件與後件的前面，故又得

$$(Ez)(<(y,z)\,\&\,\dot{P}(z)\,\&\,\overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\,\&\,\mathrm{Sc}(\dot{P}))\rightarrow(Ez)(<(y,z)\,\&\,\mathrm{Vg}(z,\overset{(\cdot)}{A})).$$

把這公式與公式(未)合併我們得

$$\dot{P}(y)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P})\to(Ez)(<(y,z)\ \&\ \mathrm{Vg}(z,\overset{(\cdot)}{A})).$$

這裏可把$(E\dot{P})$放在蘊涵式的前件的前面；若顧到 Vg 的定義，我們有

$$\mathrm{Vg}(y,\overset{(\cdot)}{A})\to(Ez)(<(y,z)\ \&\ \mathrm{Vg}(z,\overset{(\cdot)}{A})).$$

再應用規則 $\gamma 1$) 與變元改名可得

$$(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\to(Ey)(<(x,y)\ \&\ \mathrm{Vg}(y,\overset{(\cdot)}{A}))). \qquad (3)$$

由 Sc 的定義可得

$$\mathrm{Sc}(\dot{P})\to(x)(\dot{P}(x)\to(y)(<(y,x)\to\dot{P}(y))),$$

或者應用基本公式 II,1,

$$\mathrm{Sc}(\dot{P})\to(\dot{P}(x)\to(<(y,x)\to\dot{P}(y))),$$

由它經過命題演算的變形得

$$\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P})\to(<(y,x)\to(\dot{P}(y)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P}))),$$

由它經過應用基本公式 II,2 及規則 $\gamma 2$) 得

$$(E\dot{P})(\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P}))\to(<(y,x)\to(E\dot{P})(\dot{P}(y)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P}))).$$

再引入 Vg 得

$$\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\to(<(y,x)\to\mathrm{Vg}(y,\overset{(\cdot)}{A})).$$

經過兩次應用規則 $\gamma 1$)，最後得

$$(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\to(y)(<(y,x)\to\mathrm{Vg}(y,\overset{(\cdot)}{A}))). \qquad (4)$$

由基本公式 II, 2 之一作代入得

$$\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \dot{Q}(x)\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})\to(E\dot{P})(\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P}))$$

或

$$\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \dot{Q}(x)\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})\to\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A}).$$

經過命題演算的變形並應用規則 $\gamma 1$) 又得

$$\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})\to(x)(\dot{Q}(x)\to\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})). \qquad (中)$$

由 Mr 的定義得

$$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\to(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to\mathrm{Sc}(\dot{Q})),$$

再應用基本公式 II, 1 之一及命題演算的變形得

$$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})).$$

與公式(申)相合併得

$$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow(x)(\dot{Q}(x)\rightarrow\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A}))).$$

再應用規則 $\gamma 1$) 得

$$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow(x)(\dot{Q}(x)\rightarrow\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A}))).\qquad(5)$$

此外,下面是一個永眞的命題公式

$$(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow(\dot{Q}(x)\rightarrow\dot{R}(x)))\rightarrow(\dot{Q}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})\rightarrow\dot{R}(x)).$$

由此再應用基本公式 II, 1 之一得

$$(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow(y)(\dot{Q}(y)\rightarrow\dot{R}(y)))\rightarrow(\dot{Q}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})\rightarrow\dot{R}(x)).$$

若顧到$\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}$的定義,我們得

$$(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\rightarrow(\dot{Q}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{Q})\rightarrow\dot{R}(x)).$$

這裏我們在蘊涵式的前件與後件前面放置一個全稱號:

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\rightarrow(\dot{P})(\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P})\rightarrow\dot{R}(x)).$$

再顧到與第三章 §6 公式(35)相應的高型永眞式,我們得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\rightarrow((E\dot{P})(\dot{P}(x)\ \&\ \overset{(\cdot)}{A}(\dot{P})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{P}))\rightarrow\dot{R}(x)).$$

若顧到 Vg 的定義,得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\rightarrow(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\dot{R}(x)),$$

再應用規則 $\gamma 1$) 得

$$(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R}))\rightarrow(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\dot{R}(x)).\qquad(\text{酉})$$

由 Sch 的定義有

$$\mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{R})),$$

把這公式與公式(酉)合併,並加入一個前件,得

$$\mathrm{Sc}(\dot{R})\ \&\ \mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\dot{R}(x)).$$

再應用規則 $\gamma 1$) 卽得

$$(\dot{R})(\mathrm{Sc}(\dot{R})\ \&\ \mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A}))\rightarrow(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\dot{R}(x))).\qquad(6)$$

現在我們把所得的結果,公式(1)至(6)合在一起, 依照 Sch 的定義有 $\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})$,再應用規則 $\gamma 2$) 得$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})$,

因此可把公式 (1) 與公式 (5) 中的蘊涵前件 $\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})$ 換爲 $(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})$; 根據命題演算還可把公式 (3), (4) 與 (6) 的前面放置 $(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})$. 因此我們推出了下列公式:

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(Ex)\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A}),$$

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(Ex)\overline{\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})},$$

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\to(Ey)(<(x,y)\ \&\ \mathrm{Vg}(y,\overset{(\cdot)}{A}))),$$

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\to(y)(<(y,x)\to\mathrm{Vg}(y,\overset{(\cdot)}{A}))),$$

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to(x)(\dot{Q}(x)\to\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A}))),$$

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(\dot{R})(\mathrm{Sc}(\dot{R})\ \&\ \mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\to(x)(\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})\to\dot{R}(x))).$$

爲簡短起見，我們把這些公式的蘊涵後件的合取式記爲 $\mathfrak{A}(\overset{(\cdot)}{A})$, 因此根據命題演算，由以上六公式可推出 $(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to\mathfrak{A}(\overset{(\cdot)}{A})$, 又因 $(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})$, 故又得 $(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\ \&\ \mathfrak{A}(\overset{(\cdot)}{A})$ (戌). 如果在 $\mathfrak{A}(\overset{(\cdot)}{A})$ 中把每個 $\mathrm{Vg}(x,\overset{(\cdot)}{A})$ 都換爲 $\dot{F}(x)$, 又把每個 $\mathrm{Vg}(y,\overset{(\cdot)}{A})$ 都換爲 $\dot{F}(y)$, 那末 $\mathfrak{A}(\overset{(\cdot)}{A})$ 便變成另一公式，爲簡短起見，我們把它記爲 $\mathfrak{B}(\overset{(\cdot)}{A},\dot{F})$. 由基本公式 II, 2 作代入可證

$$\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\ \&\ \mathfrak{A}(\overset{(\cdot)}{A})\to(E\dot{F})(\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\ \&\ \mathfrak{B}(\overset{(\cdot)}{A},\dot{F})),$$

故由(戌)又得

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(E\dot{F})(\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\ \&\ \mathfrak{B}(\overset{(\cdot)}{A},\dot{F})). \qquad (亥)$$

但 $\mathfrak{B}(\overset{(\cdot)}{A},\dot{F})$ 有以下形式:

$$(Ex)\dot{F}(x)\ \&\ (Ex)\overline{\dot{F}(x)}\ \&\ (x)(\dot{F}(x)\to(Ey)(<(x,y)\ \&\ \dot{F}(y)))\ \&$$
$$\&(x)(\dot{F}(x)\to(y)(<(y,x)\to\dot{F}(y)))\ \&\ (\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to(x)(\dot{Q}(x)\to$$
$$\to\dot{F}(x)))\ \&\ (\dot{R})(\mathrm{Sc}(\dot{R})\ \&\ \mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\to(x)(\dot{F}(x)\to\dot{R}(x))).$$

若顧到 Sc 與 $\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}$ 的定義，我們可把(亥)，卽

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(E\dot{F})(\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\ \&\ \mathfrak{B}(\overset{(\cdot)}{A},\dot{F}))$$

換寫爲

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\to(E\dot{F})(\mathrm{Mr}(\overset{(\cdot)}{A})\ \&\ \mathrm{Sc}(\dot{F})\ \&\ (\dot{Q})(\overset{(\cdot)}{A}(\dot{Q})\to$$
$$\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{Q},\dot{F})))\ \&\ (\dot{R})(\mathrm{Sc}(\dot{R})\ \&\ \mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\to\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{F},\dot{R})).$$

再用 Sch 的定義，我們便得

$$(E\dot{P})\mathrm{Sch}(\dot{P},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow(E\dot{F})(\mathrm{Sch}(\dot{F},\overset{(\cdot)}{A})\,\&\,(\dot{R})(\mathrm{Sc}(\dot{R})\,\&\,\mathrm{Sch}(\dot{R},\overset{(\cdot)}{A})\rightarrow\overset{(\cdot)(\cdot)}{\leqq}(\dot{F},\dot{R}))).$$

因此，上確界存在的定理便證明了.

這個例子已經足以表明，就表達數學分析的推理方式說來，層次演算是一個適當的工具. 借助於層次演算而把數學基礎完全構造起來的乃由懷特黑與羅素所完成[1]. 但他們的討論却由於使用 §4 所提到的分支類型論之故而弄得不必要地複雜. 但要從這兩位著者的推演中而把分支類型論消去却並沒有什麽特別的困難.

在所引的例子裏，層次演算只是在很簡單的方式下被使用着，因爲唯一地超出第二層次的只在於使用了自由變元 $\overset{(\cdot)}{A}$. 如果不把有理數當作個體引入，而把它們當作某一層次的謂詞而引入的話，所用的證明方法仍可立卽在層次演算中作出.

§7. 對層次演算的最後附註

要把狹義謂詞演算加以推廣，使能夠勝任愉快地來推演出在數學各領域內出現的複雜的推理式，§5 處所用的方法，卽構作層次演算的方法，卽使不計及細小的形式上的差異，也不是唯一可能的方法. 毋寧可以說，若爲了這個目的，那末根本不必走出狹義謂詞演算的形式體系以外. 這裏也可有各種各樣的可能性，我們在後文只給出一些簡短的指示.

第一個方法與層次演算有密切的連系. 在層次演算中我們曾經處理過不同的客體種類，卽眞正的客體，一元及二元個體謂詞等等. 對於每一種類的變元，我們用特殊的記號，正如我們在 99 頁對於點及直綫所作的那樣. 但不同的客體領域的同時出現這一點

1) Whitehead, A. N. and Russell, B.: Principia Mathematica. 2 版，劍橋，1925—1927.

却可以用 101 頁所指示的方法加以避免[1]，即引入個別謂詞，例如 $\Gamma(x)$："x 是一個個體"；$\dot{\Lambda}(x)$："x 是一個一元個體謂詞"；$\overset{(\cdot)}{\Lambda}(x)$："$x$ 是一個謂詞，其第一變目是一元個體謂詞而第二變目是個體" 等等[2]. 此外我們還用到下列種類的謂詞：$\Phi_1(x,y)$："一元謂詞 x 對 y 成立"；$\Phi_2(x,y,z)$："二元謂詞 x 對 y 與 z 成立". 借助於這些謂詞，我們可把層次演算中的一些公式，例如，

$$(Ex)(y)\ddot{F}(x,y)\rightarrow(y)(Ex)\ddot{F}(x,y)$$

寫成

$$\ddot{\Lambda}(z)\rightarrow[(Ex)(\Gamma(x)\ \&\ (y)(\Gamma(y)\rightarrow\Phi_2(z,x,y)))\rightarrow$$
$$\rightarrow(y)(\Gamma(y)\rightarrow(Ex)(\Gamma(x)\ \&\ \Phi_2(z,x,y)))].$$

而這可當作狹義謂詞演算的一個永眞公式而建立. 其公理體系可如下得到，在第三章 §5 所給的邏輯基本公式以外，我們還加入一些附加公理，卽含有上述的個別謂詞的公理，以及在層次演算中作爲新基本公式及推理規則而加入的那些公理. 其中有一部分實在是不必加入的，因爲現在我們只處理統一的客體域. 由這個公理系統而得出新公式的方法恰和第三章§11所用的一般方法相同.

第二個方法與集合論的公理結構有密切連系，而和層次演算無關. 抽象集合論與邏輯有特別密切的關係(見第二章 §1 及第四章 §3)：我們可以說，正和以前已經說過的一樣，在邏輯推理中永遠只牽涉到謂詞的外延，因此集合或類可用以代替謂詞. 與邏輯無關地，集合論的公理化已經由蔡梅羅、弗蘭克爾 (A. Fraenkel)、馮紐曼 (J. von Neumann)、伯爾奈斯諸人的著作很好地作出了，並且看來也很像能夠避免誖論似的. 我們可把集合論的公理(其中出現有個別謂詞如 $El(x,y)$："x 爲集合 y 的元素" 等等) 作爲附加

---

1) 又參見 Schmidt, A.: Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen. Math. Ann., 115(1937).

2) 這裏的客體域只有一種，因此用不着類型的劃分. 這裏的 $\overset{(\cdot)}{\Lambda}$ 等並非標出類型，而只是一種特別的謂詞記號，不要與類型混亂—— 譯者註.

公理而加到狹義謂詞演算去，因而推廣邏輯的形式體系而無須走出狹義謂詞演算的符號體系之外．值得注意的是，集合論的公理系統可以限制於只爲第一層次的（關於這個概念可參見第三章103頁）[1]．就在集合論的公理結構上，亦有些類似於層次區分的東西，因爲只是能夠很簡單地用構作方式作出的集合才被允許承認．

此外還有各種各樣不同的企圖，想把層次區分根本廢除或者只在很弱的形式下使用，這時諍論的障礙當然要用適當的方式除去．有關的著作却各以完全不同的方向而活動，因此不可能指出一個統一的傾向來[2]．

---

1) 關於把古老的策梅羅-弗蘭克爾公理系統（那是關於第二層次的）加以調整使合於邏輯的目的，可參見 Ackermann, W.: Mengentheoretische Begründung der Logik. Math. Ann., 115(1937).——至於第一層次公理系統的一個例子，我們可引 P. Bernays 所建立的那一個，同時亦指明了它是包括在狹義謂詞演算之內的．參見 P. Bernays: A system of axiomatic set theory. Part I. Journ. Symb. Logic, 2 (1937); Part II, J.S.L., 6 (1941); Part. III 與 IV, J.S.L., 7(1942); Part. V, J.S.L., 8(1943); Part. VI, J.S.L., 13(1948).

2) 例如可參見：A. Church: A proof of freedom from Contradiction. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,21(1935). ——W. V. Quine: New foundation for mathematical logic. Amer. Math. Monthly, 44 (1937).——L. Chwistek and W. Hetper: New foundation of formal metamathematics. Journ. Symb. Logic, 3(1938).

附　　錄

原書第一版第四章最後幾節(§5—§9)

§5. 層次演算的方法

根據我們所發現的矛盾,我們必須作出結論說,我們的形式運算的方法是有缺點的.這個缺點的出現只能夠由於:當我們把原來的就狹義函詞演算[1]而建立的公理系統加以推廣時,我們還不夠小心地處理的緣故.

在對以前的處理加以改正時,為了得到正確的觀點起見,我們還須把以前對演算作推廣時所用的基本原理再加以考察一次.我們採用懷特黑與羅素的論點.

函詞演算的本來方法是把一系列或多系列的個體作為預先給定的,而關於變元的運算(尤其是量詞)則以涉及這些個體的總體而獲得其邏輯意義.演算的推廣在於:我們把命題與謂詞亦當作個體,因而對於必須提及命題或函詞的總體才能獲得其邏輯意義的那些符號表達式亦是容許的.

事實上,這樣的處置是有問題的,因為必須提及命題或函詞的總體才得到其意義的那些表達式,其本身又可算作命題或函詞,但另一方面,要能夠提及命題與函詞的總體又必須把後者看作是預先確定的.這裏便含有一種邏輯上的循環,我們有理由認為,這種循環便是詩論出現的根源.

因此,如果我們仍想把命題與函詞作為邏輯函詞的變目所取

1) 在第一版中作者把"謂詞"(Prädikat)稱為"函詞"(Funktion)並且兩者混用.為保持原文起見,我們亦分別譯為不同的名稱——譯者註.

的値,我們便須把命題與函詞變元這樣地規定,使得上述的關於命題與函詞的總體的有疑問的構成法得以免除.

根據這個想法我們得出懷特黑與羅素的類型論或層次演算.

在這個理論裏,我們可以區別兩個不同的觀點. 第一個是,凡可以代入一個函詞的空位處而作爲其變目的,必與函詞本身有完全不同的性質. 要刻劃一函詞,給出它的定義域是必要的. 根據我們的原則,凡是依賴於函詞本身的那些東西都不能屬於該定義域. ——因而我們得到一種概念間的關係,羅素把它叫做類型梯級. 原來系統內的個體屬於第一型. 個體謂詞屬於第二型. 一般地說,一邏輯函詞,如果其變目屬於$\leqslant n$型並且至少有一變目是第n型的,它便屬於第$n+1$型. 一函詞的每一個空位只能填以屬於相應變目的型的客體. 相應地,量詞的使用亦只限於由同型客體所組成的總體.

除了這個想法以外,懷特黑與羅素還利用了更進一步的想法. 因爲,下列表達式的普遍使用,如"對於一切個體謂詞","有一個個體謂詞","對於一切命題"等等,亦是有問題的. 很可能,在某個個體謂詞的定義中,出現了一個相應於個體謂詞的量詞,因此這個個體謂詞便須提及一切個體謂詞的總體才能定義. 我們又可以考慮下列情形."一切命題都或眞或假",這句話本身亦是一命題. 但這命題本身却通過提及一切命題的總體而定義. 爲了避免這個循環,我們採取下列路徑.

我們想像給定了一個固定的個體域以及其中的一些基本謂詞.我們可把這些基本函詞看作有直覺的性質.在這個原有的域上我們使用狹義函詞演算因而得出一個"第一層"的理論. 第一層中的謂詞是一個一項或多項的邏輯函詞,它由基本謂詞借助於邏輯運算"與","或","非","如果—則","一切"與"有些"併結而成的. 運算"一切"與"有些"當然是只涉及原來的個體域而言的. 把第一層函詞的空位塡滿,或把量詞放在其前面我們便得到第一層的命題.

現在我們再構作第二層的理論．我們把第一層的函詞與命題當作一個新個體域，加到原有的個體域去． 如果我們把這樣所推廣的個體體系作爲基本，我們便能夠確定"第二層"的函詞與命題域．它與前者的區別在於，邏輯函詞的變目以及全稱號、存在號，不但涉及原有的個體而且涉及第一層的謂詞及命題．

正和由第一層而至第二層一樣，我們可得第三層乃至更高層．

通過層次演算的方法，一方面我們有可能把每個命題、性質或關係作爲判斷的客體；另一方面又使我們能夠避免那個關於一切命題或一切函詞的總體這種有疑問的運算，因爲我們只允許通過繼續的層次構成所能達到的表達式，又因爲對於一個確定層次的理論，它所涉及的客體總體是明確地限定的．

爲了使這種層次區分在我們的符號中有所反映起見，我們把命題及函詞記號標以數字足碼． 這些記號可如下理解，一命題記號 X_n 或一函詞記號 F_n 的值域是限於在第 n 層理論中的命題及函詞的． 凡用以表示一命題或一確定函詞的表達式，我們都要求其中出現的命題記號或函詞記號都附上一個足碼．一函詞記號的足碼必須大於它的每一個變目的足碼．以 1 爲足碼的函詞記號永遠以原來的個體域內的客體爲變目．

我們的公理與狹義函詞演算的相同． 只是當應用公理時，命題與函詞記號必須附以足碼． 代替公理 c)：$(x)F(x)\to F(y)$，我們有一個公理規則：每一個如下形式的公式：

$$(x)F_n(x)\to F_n(y),$$
$$(A_n)F_m(A_n)\to F_m(B_n), \qquad (m>n)$$
$$(G_n)F_m(G_n)\to F_m(H_n)$$

都作爲公理． 這裏 A_n, B_n 爲命題變元，而 G_n 與 H_n 爲函詞變元，對公理 f) 與規則 γ) 準此．

在代入時我們要注意，對於命題變元與函詞變元，我們只能代入同層的或低層的命題表達式及函詞表達式．至於一表達式的足

碼則如下定義：如果在一表達式中出現的足碼最高的爲 n，那末當有一個屬於足碼 n 的變元的量詞出現時，該表達式的足碼爲 $n+1$，否則其足碼仍爲 n. 對於函詞表達式，其足碼的定義還要看該表達式的變目究竟是什麽而定. 這時足碼必須提高得高於所有變目的足碼. 例如函詞表達式 $F_1(x)\sim G_1(x)$ 是一個第一層的個體謂詞，但却是一個第二層的函詞函詞. 當確定一個表達式的足碼時，還要把作爲縮寫用的記號的定義式中所出現的足碼計及才成.

照這樣子我們便建立了一個新的演算形式，層次演算，它是原有的函詞演算的推廣，因爲後者確是作爲第一層的理論而包含於其中的，但若與我們上面所作的函詞演算的推廣相比較時，它却在形式運算上作了一個重要的限制.

現在必須證明，在詩論中出現的矛盾，通過層次演算已經可以免除了. 試討論以前論及的三個詩論，那便可以如下證明.

就第一個詩論說，現在沒有可能來定義一個適用於所有謂詞 P 的函詞 $Pd(P)$. 設改用一個函詞 $Pd(P_n)$，而 n 爲一個固定的數，那末它便不再屬於第 n 層的理論，對於 $\overline{Pd}(P_n)$ 也是如此. 因此 $\overline{Pd}$ 不能作爲 Pd 的變目 P_n 之值. 表達式 $Pd(\overline{Pd})$ 根本不能構成.

在第二個詩論中，表達式

$$(X)(\mathrm{Bh}(X)\rightarrow\overline{X})$$

含有一個全稱號，它涉及所有命題的總體. 如果我們根據層次演算的要求，把 X 的變化限於某一個最高型，卽把記號 X 加上足碼 n，那末整個命題便是一個第 $n+1$ 層的表達式. 因此在公式

$$(X_n)\{\mathfrak{A}\rightarrow(\mathrm{Bh}(X_n)\rightarrow\overline{X}_n)\}$$

中，表達式 $\mathfrak{A}$ 不能作爲 X_n 的一個特殊值，因而我們得不到公式 $\mathfrak{A}\rightarrow\overline{\mathfrak{A}}$. 就內容意義上說，如果我們爲了不涉及所有命題的總體起見而把 $\mathfrak{P}$ 的言語更改爲："$\mathfrak{P}$ 在時間 t 內所說出的每一個第一層的斷言都是假的"，那末我們便可以把它看作是眞的而不致引起矛

盾，因爲它本身是第二層的斷言．如果在表述$\mathfrak{P}$的言語時不說"第一層的斷言"，而說"至高爲第二層的斷言"或"至高爲第三層的斷言"等，結果亦同．

在第三個諍論中，所謂用符號而定義的數這個概念裏涉及了一切謂詞的總體，因在謂詞 $Dsc(x)$ 的表達式中出現了存在記號 (EP)．如果我們根據層次演算的意義確定了概念的構成，不直捷地說到一個用符號而定義的數，而更準確地說明它的定義表達式中最高層是什麼，那末矛盾便不會出現了；因爲，在20世紀中從未用過最高爲 n 層的表達式而定義的數的最小者，的確可由這個性質來定義；但這時它的定義表達式却屬於 $n+1$ 層了．

§6. 層次演算的不足性

我們看見，由於層次的限制，我們的廣義演算可以不致矛盾，那是當使用無限制的運算時所引起的．現在我們要問，這樣一來，這演算是不是太拘束了呢？對這演算我們必須要求，比如說，它能夠把在數學基礎上起重要作用的那些推理式表示出來．

從這個觀點而論，我們的**恆等性的定義**碰到困難這一點，已使我們不安．因爲，在定義表達式 $(F)(Fx)\sim F(y))$ 中，函詞記號 F 必須附一足碼，因此，我們得不到唯一的一個恆等性關係，却因足碼的選擇的不同而得到不同的謂詞：$\equiv_1(x,y)$，$\equiv_2(x,y)$ 等等．這固然並不十分可怕，因爲所有這些不同的謂詞都對於同一的對偶 x，y 同時成立或同時不成立．關於這點，我們可作如下的討論：

首先，顯然地，對於每個 n，由關係

$$(F_{n+1})(F_{n+1}(x)\sim F_{n+1}(y))$$

可推出關係

$$(F_n)(F_n(x)\sim F_n(y)),$$

因爲 F_n 的值域包括在 F_{n+1} 的值域之內．因此便證明了：

$$\equiv_{n+1}(x,y)\rightarrow\equiv_n(x,y).$$

現在要問，其逆

$$\equiv_n(x,y)\rightarrow\equiv_{n+1}(x,y)$$

是否成立．我們可限於 $n=1$ 的情形而不致喪失了普遍性．我們可以從內容上看出這個命題的眞確性：一個涉及客體的謂詞只當其中出現有屬於命題變元或函詞變元的量詞時才是第二層的表達式． 這樣謂詞的表達式可如下選取：把這些量詞以及屬於個體變元的量詞置於開首處，其後跟上一個表達式，在這表達式中所出現的變目除了所要表示的謂詞的變目以外，還有前面的量詞所屬的命題變元、函詞變元以及個體變元． ——試設該謂詞可表爲以下形式：

$$(Ez)(F_1)(EG_1)\Phi(F_1,G_1,z,x).$$

根據我們對 Φ 所作的假設，謂詞 $\Phi(F_1,G_1,z,x)$ 是屬於第一層的，因爲它是由第一層謂詞借助於運算 &, ∨, $\overline{}$, → 而聯結成的． 由 $\equiv_1(x,y)$ 可得

$$\Phi(F_1,G_1,z,x)\sim\Phi(F_1,G_1,z,y).$$

因爲這對於每個第一層謂詞 F_1,G_1 以及對於每個 z 成立，故得

$$(Ez)(F_1)(EG)\Phi(F_1,G_1,z,x)\sim(Ez)(F_1)(EG_1)\Phi(F_1,G_1,z,y).$$

這個討論對於每個特殊的第二層謂詞都成立． 因此我們得

$$(F_2)(F_2(x)\sim F_2(y)),$$

即證明了

$$\equiv_1(x,y)\rightarrow\equiv_2(x,y).$$

這個討論是不夠滿意的，因爲它不能幫助我們從公理出發而形式地推出以下公式

$$\equiv_1(x,y)\rightarrow\equiv_2(x,y).$$

但它總指出了，分裂成各個關係 $\equiv_n(x,y)$ 並沒有原則上的壞處．

但如果要把集合論以及數學分析上的推理式在我們的演算中表示出來，却有嚴重的困難． 在試圖把康托 (Cantor) 的關於不可數集合的存在性的證明用我們的演算的表達法來表示時，我們已

遇到這樣的困難. 這裏,我們不討論所有整數集合的集合(它已經是不可數集合的一個最簡單例子),而討論所有以整數作爲客體的謂詞的集合. 這時我們必須把這些謂詞的總體加以限制,因爲依照層次演算的說法,我們不應直捷地說所有整數謂詞的集合. 反之,對於這些謂詞必須規定一個最高層.

設所選的層數爲 n,那末我們便須討論最高爲 n 層的整數謂詞的集合,且須證明,這個集合是不可數的,即須證明,如果用某種方法把整數與該集合的謂詞作一一對應,那末所有對應的謂詞無論如何不能窮盡該集合的所有謂詞.

爲了要依照康托的證法而討論,我們假設,有某一個所要求的對應,即有一個命題 $R(x,P_n)$,對於每一個固定的 x,恰巧只有一個謂詞 P_n 來滿足它. 試考慮謂詞 $Pc(x)$,它對於 x 成立當且僅當 x 所對應的謂詞對 x 不成立. 因此 $Pc(x)$ 可定義如下:

$$(P_n)(R(x,P_n)\rightarrow\overline{P}_n(x)).$$

根據這謂詞的定義,我們可以證明,它不能夠是有整數與之相對應的謂詞之一. 因爲,設 Pc 與 m 相對應,則一方面必有 $R(m,Pc)$,另一方面根據 Pc 的定義以及對應的一對一性有

$$Pc(m)\sim(R(m,Pc)\rightarrow\overline{P}c(m)).$$

根據這兩個關係可得

$$Pc(m)\sim\overline{P}c(m)$$

因而得到一個矛盾.

若由康托的證法而類推,得到了這個結果之後,我們應該便達到目的了. 但事實上,我們只是證明了存在一個整數謂詞,它和通過 R 而與整數相對應的所有謂詞均不相同,但並沒有證明,這個謂詞 Pc 是屬於我們的集合的;而這個要求也的確不能滿足. 因爲這個集合只包含了 n 層的謂詞,而 $Pc(x)$ 的定義表達式即

$$(P_n)(R(x,P_n)\rightarrow\overline{P}_n(x))$$

却是第 $n+1$ 層的. 因爲根據層次的劃分來說,所想要的證明是

不存在的.

與這例子完全相同的還有其它很多情形，由於層次的區分使我們不能把一些數學推理式來作邏輯演算的仿造. 特別地，對實數論基礎便是這樣. 在數學中對實數曾有不同的引入方式. 我們定義一實數可借助於康托的基本數列，或者借助於無窮十進小數或二進小數，或者借助於狄德金分割. 就與邏輯相聯系這點來說，狄德金的方法是最值得推薦的. 在組成分割的兩類有理數中，我們只須考慮小的一類. 一個有理數類或有理數集可通過它的定義謂詞而給出. 因此我們把實數定義為具有一定性質、所謂"分割性質"的謂詞，$Sc(P)$，並注意，等價的謂詞表示同一實數. 實數必須構成一個有確定範圍的客體域; 因為在分析中經常出現着關於一切實數以及實數存在的定理. 因此我們必須把用以定義實數的謂詞限於一定的域內，例如只允許用第一層的謂詞以定義實數. 照此，一實數便是一個第一層的謂詞 P_1，它滿足一定的條件 $Sc(P_1)$.

兩實數的和與積可相應地定義，事實上並可用第一層謂詞來表示. 但却另有一個問題：分析學中更高的推理式可否從我們的邏輯理論得出呢? 特別值得提的是上確界定理，它說，每一個有界的實數集合都有一個上確界，卽有一個實數 a，使得集合中每一數都$\leqslant a$，又每一個 $<a$ 的實數，至少被集合中一個數所超過. 我們不必深入它的準確的形式的處理（這將在 §8 中詳細地作出）亦可以容易地從內容上說明，就表示上確界的謂詞而言，它的定義中出現了關於第一層謂詞的全稱號及存在號，這便等於說，這個謂詞本身是屬於第二層的，因而根本不表示任何實數. 因此用我們的演算根本不能作出關於上確界存在性的證明.

§7. 可化歸性公理

前面的例子表明了，層次演算的方法把推理的可能性過度限制了，因此我們須設法加以修整，使得我們的演算具有更大的靈活

性. 我們再考慮一下上確界存在性的證明. 這證明所以不能在層次演算中導出, 是因爲, 用以定義上確界的謂詞乃高於一層的緣故. 要完成這個證明,只須對於這樣的一個謂詞恆有一個等價的第一層謂詞便成,因爲第一層謂詞的確表示一個實數. 同樣地,關於不可數集合存在性的康托證明亦然.

面對這個事實,懷特黑與羅素選了一條出路,他們在層次演算中加入一個特別的假設,"**可化歸性公理**".

爲了對這個假設作一般的表述起見, 我們把以前就謂詞而定義的等價概念加以推廣, 一般地我們把兩個具有同一種類的變目的函詞叫做等價,只要它們對於恰巧同樣的變目同時成立. 我們再引入一個新名詞,一個函詞表達式叫做"**直謂的**",如果它具有它的變目所允許的最低的層, 亦卽它的層須與只以該表達式的變目作爲唯一的未確定記號的那些表達式的層相同.

應用了這個術語後,我們這個公理便可以如下表述:

"**對於在層次演算中出現的每一個函詞表達式都有一個等價的直謂表達式**".

它含有下列的假設作爲特例, 卽對於每一個謂詞 $P_n(x)$ (具有任意的足碼 n, 其變目只是演算中原來的客體)都有一個等價的第一層謂詞,若利用演算中的表達式那便是:對於每個 n

$$(P_n)(EP_1)(x)(P_n(x)\sim P_1(x))$$

是一個眞公式.

人們會以爲,由於假設了可化歸性公理後,剛剛避免了的矛盾又將重新引入了. 但事實不然,這可由所處理的誖論而容易看出.

首先,就前兩個誖論而言. 我們的假設絕不能應用;第一例所以不能應用,因爲根據定義言,函詞 $Pd(P_n)$ 本身就是直謂的,第二例所以不能應用, 因爲我們的公理只涉及函詞表達式並沒有涉及命題的表達. 至於第三例,倒是可以應用我們的假設. 層次演算之所以把矛盾除去, 原因在於: 函詞 $\mathrm{Mds}(x)$ 的層次比之在它的定

義中暗中出現的函詞記號 P 的足碼多 1. 這裏便有一個機會可以使用我們的新假設了. 我們可以斷言,存在一個與 Mds(x) 相等價的第一層謂詞. 但是仍不能把以前出現的矛盾重新引入. 因為,即使存在一個與 Mds(x) 相等價的謂詞,但我們還沒有寫出關於這個謂詞的符號表達式,因而不能假設,函詞 Scr 可用於這個謂詞,因此,出現矛盾的一個重要條件便失掉了.

§8. 可化歸性公理的應用

我們已經指出,即使容許可化歸性公理,悖論仍然是可以刪除的,既指出了這點以後,我們便須用一些例子來表明,在層次演算的富有結果的應用上所首先遇到的一些阻難,如何可以通過這公理的引入而得以克服.

作為一個值得注意的優點,由假設這公理而得的,首先可以指出,它使我們有可能對關係式

$$\equiv_1(x,y)\sim\equiv_n(x,y)$$

作嚴格的形式證明(對每個 n 值). 這可用下列方法得出.

首先,我們證明:如果 $\Phi(P_n)$ 是一個依賴於 P_n 的函詞表達式[1],它使得

$$(x)(P_n(x)\sim P_1(x))\rightarrow(\Phi(P_1)\rightarrow\Phi(P_n)) \tag{A}$$

是一個在該演算中可以證明的公式,那末我們便可斷言,下式亦可以證明:

$$(P_n)\Phi(P_n)\sim(P_1)\Phi(P_1). \tag{B}$$

證. 在(A)中把全稱號 (P_1) 放在前面,再由公式(34):

$$(EP_1)(x)(P_n(x)\sim P_1(x))\rightarrow(EP_1)(\Phi(P_1)\rightarrow\Phi(P_n)).$$

但是

$$(EP_1)(\Phi(P_1)\rightarrow\Phi(P_n))$$

1) 依照全書的通例,這裏須用德文字母寫為$\mathfrak{A}(P_n)$——譯者註.

可換以等價的表達式

$$(P_1)\Phi(P_1)\to\Phi(P_n),$$

故得

$$(EP_1)(x)(P_n(x)\sim P_1(x))\to((P_1)\Phi(P_1)\to\Phi(P_n)).$$

如果我們把全稱號(P_n)置於前面，並利用公式(31)便得

$$(P_n)(EP_1)(x)(P_n(x)\sim P_1(x))\to(P_n)((P_1)\Phi(P_1)\to\Phi(P_n)).$$

在→記號前面的公式與可化歸性公理相同，故得

$$(P_n)((P_1)\Phi(P_1)\to\Phi(P_n))$$

因而得

$$(P_1)\Phi(P_1)\to(P_n)\Phi(P_n). \qquad \text{(C)}$$

另一方面如果應用公理 e) 可得

$$(P_n)\Phi(P_n)\to\Phi(P_1),$$

應用規則 γ) 得

$$(P_n)\Phi(P_n)\to(P_1)\Phi(P_1). \qquad \text{(D)}$$

由(C)與(D)便得(B).

但是如果把 $\Phi(P_n)$ 代以 $P_n(z)\sim P_n(y)$[1]，那末這時的公式(A)是可證的；因由

$$(x)(P_n(x)\sim P_1(x))\to(P_n(z)\sim P_1(z)),$$
$$(x)(P_n(x)\sim P_1(x))\to(P_n(y)\sim P_1(y))$$

可得

$$(x)(P_n(x)\sim P_1(x))\to[(P_1(z)\sim P_1(y))\to(P_n(z)\sim P_n(y))].$$

因此對於這個 $\Phi(P)$ 言關係式 (B) 也成立，即

$$(P_n)(P_n(x)\sim P_n(y))\sim(P_1)(P_1(x)\sim P_1(y)),$$

或可寫爲

$$\equiv_n(x,y)\sim\equiv_1(x,y),$$

於是得證.

---

1) 原文是把 $\Phi(P_n)$ 代以 $P_n(x)\sim P_n(y)$，這便使得下面三行公式中有兩行不成其爲公式(依本書的定義言)，故今改成 $P_n(z)\sim P_n(y)$——譯者註.

更突出的以及更有價值的是可化歸性公理在實數論基礎上所起的作用. 我們已經對狄德金理論在邏輯演算上的表示作了一個簡短的指示.

狄德金把實數定義爲一個"分劃",即把有理數劃分爲兩類,它具有下列"分劃性質":

1. 兩類中每一類至少含有一個有理數.

2. 第一類中沒有最大的有理數.

3. 如果一有理數屬於第一類,那末所有更小的有理數亦屬於第一類.

正如我們上面已經指出的那樣,在上述這種區分中,我們永遠只須考慮兩類中的第一類,並把它看作一個有理數集,它可以借助於定義謂詞來表示.

因此,我們便如下進行:我們把有理數及它們之間的算術基本關係作爲個體域中的客體系.

因此,我們把實數理解爲有理數集,它有一個定義謂詞 P,P 須滿足下列三個條件:

1. $(Ex)P(x)$ & $(Ex)\bar{P}(x)$

("通過 $P(x)$ 及 $\bar{P}(x)$ 所確定的兩類都不是空的").

2. $(x)\{P(x)\rightarrow(Ey)(<(x,y)$ & $P(y))\}$

("對於每一個具有性質 P 的有理數,都有一個更大的有理數,也具有性質 P").

3. $(x)\{P(x)\rightarrow(y)(<(y,x)\rightarrow P(y))\}$

("如果 x 具性質 P,那末所有更小的有理數 y 亦具有性質 P").

這三個性質合併起來——我們可想像用記號 & 來聯結它們——便組成了一謂詞 P 的"分劃性質". 一個謂詞的這個性質我們表以 $\mathrm{Sc}(P)$. 兩個謂詞 P 與 Q 而具有性質 $\mathrm{Sc}(P)$ 及 $\mathrm{Sc}(Q)$ 的,它們之表示同一實數當且僅當屬於 P 與 Q 的兩集合彼此相同時,即當且僅當 $\mathrm{Aeq}(P,Q)$ 成立時,爲了顧到層次演算的要求,我們還必須對實

數的定義謂詞確定一最高層次,爲了使程序盡可能簡單起見,我們只允許用第一層謂詞以定義實數.

現在,我們首先引入兩實數間的大小關係. 對於兩個具有性質 Sc 的謂詞 P_1, Q_1 言, $\leqslant(P_1, Q_1)$ 與 $\mathrm{Imp}(P_1, Q_1)$ 意義相同,卽與

$$(x)(P_1(x) \to Q_1(x))$$

意義相同,或表以公式

$$\mathrm{Sc}(P_1) \,\&\, \mathrm{Sc}(Q_1) \to (\mathrm{Imp}(P_1, Q_1) \sim \leqslant(P_1, Q_1)).$$

命題 $<(P_1, Q_1)$ 便定義如下:

$$\mathrm{Sc}(P_1) \,\&\, \mathrm{Sc}(Q_1) \to (<(P_1, Q_1) \sim (\mathrm{Imp}(P_1, Q_1) \,\&\, \overline{\mathrm{Aeq}}(P_1, Q_1))).$$

可在演算中證明, $\leqslant(P_1, Q_1)$ 與 $<(P_1, Q_1)$ 兩個關係都是可傳的. 同樣還可以證明次序關係的其它刻劃性質.

實數的加法與乘法可化歸到有理數的加法與乘法去. 謂詞

$$(Ey)(Ez)(P_1(y) \,\&\, Q_1(z) \,\&\, (x = y + z))$$

表示由 P_1 與 Q_1 所定義的兩實數的和,而

$$(Ey)(Ez)(P_1(y) \,\&\, Q_1(z) \,\&\, (x = y \cdot z))$$

則表示其積 ($x = y + z$ 及 $x = y \cdot z$ 則表示有理數域內的三項基本謂詞).

現在我們可以照通常方法引入一個實數集合的有界性及其上確界了. 一個實數集可以通過滿足下列條件的謂詞謂詞 $A(P_1)$ 來表示:

$$(P_1)(A(P_1) \to \mathrm{Sc}(P_1)) \,\&\, (P_1)(Q_1)((A(P_1) \,\&\, \mathrm{Aeq}(P_1, Q_1)) \to A(Q_1)).$$

一實數集 $A(P_1)$ 界於上的斷言是指, 有一個實數大於或等於該集合中每一數: 以公式表之則爲:

$$(EP_1)\{\mathrm{Sc}(P_1) \,\&\, (Q_1)(A(Q_1) \to \leqslant(Q_1, P_1))\},$$

它可縮寫爲 $(EP_1)\mathrm{Sch}(P_1, A)$, 在語言上讀爲: 有一數 P_1, 它爲集合 A 的上界.

我們還假定, $A(P_1)$ 至少有一元素, 卽以下公式成立:

$$(EP_1)A(P_1).$$

A 的變目只能是第一層的謂詞. 至於函詞 A 本身可能的最高層，那便必須至少爲 2，因爲 $A(P)$ 旣是謂詞的函詞，不可能仍屬於第一層. 但除了 1 以外却可以隨意選定其層次. 因此我們隨便選取一個固定的 n 作爲 A 的足碼. 關於上確界的定理便可如下表述：如果一個實數集有上界，那末它便有一個最小的上界.

上確界存在性的數學證明，如果寫成最簡單的形式，那便是，對所考慮的一集實數（實際上是一集的第一層次的集）作出其倂集. 根據本章 §3 所說的，與 $A_n(P_1)$ 相應的倂集可用謂詞

$$(EP_1)(P_1(x) \ \& \ A_n(P_1))$$

來表示.

今後我們把這個謂詞縮記爲 $\mathrm{Vg}(x, A_n)$.

今須證明謂詞 $\mathrm{Vg}(x, A_n)$ 表示一個實數，並且它就是集合 A_n 的上確界.

我們首先必須證明由 $\mathrm{Vg}(x, A_n)$ 所確定的集合可看作一個實數.

首先，容易證明，倂湊於 Sc 之內的三個性質對於 Vg 是成立的. 這裏我們只推出第一個性質.

由

$$(EP_1)(A_n(P_1)),$$

$$(P_1)(A_n(P_1) \rightarrow \mathrm{Sc}(P_1))$$

可推得

$$(EP_1)(\mathrm{Sc}(P_1) \ \& \ A_n(P_1)).$$

因爲

$$\mathrm{Sc}(P_1) \rightarrow (Ex)P_1(x)$$

成立，故又有

$$(EP_1)((Ex)P_1(x) \ \& \ A_n(P_1)).$$

這一公式可變形爲

$$(Ex)(EP_1)(P_1(x) \ \& \ A_n(P_1)),$$

即

$$(Ex)\mathrm{Vg}(x,A_n).$$

同樣地可證

$$(Ex)\overline{\mathrm{Vg}}(x,A_n) \text{ 即 } (Ex)\overline{(EP_1)}(P_1(x)\ \&\ A_n(P_1)).$$

其證明如下．先把這公式變形爲

$$(Ex)(P_1)(A_n(P_1)\rightarrow\overline{P}_1(x)).$$

由於集合 A_n 有界性的假設，我們有

$$(EP_1)\{\mathrm{Sc}(P_1)\ \&\ (Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow\leqslant(Q_1,P_1))\}.$$

此外又有

$$\mathrm{Sc}(P_1)\rightarrow(Ex)\overline{P}_1(x),$$

故得

$$(EP_1)\{(Ex)\overline{P}_1(x)\ \&\ \mathrm{Sc}(P_1)\ \&\ (Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow\leqslant(Q_1,P_1))\}.$$

根據 $\leqslant(Q_1,P_1)$ 的定義，容易得

$$\leqslant(Q_1,P_1)\ \&\ \mathrm{Sc}(Q_1)\ \&\ \mathrm{Sc}(P_1)\rightarrow(x)(\overline{P}_1(x)\rightarrow\overline{Q}_1(x)).$$

因此上面一公式中的 $(Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow\leqslant(Q_1,P_1))$ 可換以[1]

$$(Q_1)[A_n(Q_1)\rightarrow(x)(\overline{P}_1(x)\rightarrow\overline{Q}_1(x))],$$

或換以

$$(x)[\overline{P}_1(x)\rightarrow(Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow\overline{Q}_1(x))].$$

由公式

$$(EP_1)\{(Ex)\overline{P}_1(x)\ \&\ \mathrm{Sc}(P_1)\ \&\ (x)[\overline{P}_1(x)\rightarrow(Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow\overline{Q}_1(x))]\}$$

便可推得

$$(Ex)(Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow\overline{Q}_1(x)),$$

即

$$(Ex)\overline{\mathrm{Vg}}(x,A_n).$$

因此證明了，$\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 具有第一個分劃性質．

---

1) 這裏還用到 $A_n(Q_1)\rightarrow\mathrm{Sc}(Q_1)$ —— 譯者註．

同樣地可以證明 $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 具有分割性質 2 與 3(181 頁). 因此 $\mathrm{Sc}(\mathrm{Vg})$ 成立.

但從這裏還不能說, $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 表示一個實數. 這裏我們必須證明,由謂詞 $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 所確定的集合可由一個第一層次的謂詞而定義. 但 $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 本身絕非第一層次的,因為其中出現一量詞 (EP_1). 這裏便需用到可化歸性公理. 根據這個公理有

$$(EP_1)(x)(P_1(x)\sim \mathrm{Vg}(x,A_n)).$$

因此 $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 定義了一個實數.

今證明[1)]

$$(P_1)(A_n(P_1)\rightarrow \leqslant(P_1,\mathrm{Vg}(x,A_n)))$$

即 $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 所對應的實數是 $A_n(P_1)$ 所確定的集合的一個上界.

如果我們把 $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 及 $\leqslant$ 的定義表達式代入,這個公式便變為

$$(P_1)(A_n(P_1)\rightarrow(x)[P_1(x)\rightarrow(EQ_1)(Q_1(x)\ \&\ A_n(Q_1))]),$$

再作變形即得

$$(P_1)(x)(A_n(P_1)\ \&\ P_1(x)\rightarrow(EQ_1)(A_n(Q_1)\ \&\ Q_1(x)))$$

由這形式可見本公式乃公理 f) 的一個特例.

還須證明, $\mathrm{Vg}(x,A_n)$ 表示最小的上界,寫成公式便是:

$$(P_1)\{[\mathrm{Sc}(P_1)\ \&\ (Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow\leqslant(Q_1,P_1))]\rightarrow\leqslant(\mathrm{Vg},P_1)\}.$$

這裏我們再把縮寫符號換回它們的定義式. 便得

$$(P_1)\{[\mathrm{Sc}(P_1)\ \&\ (Q_1)(A_n(Q_1)\rightarrow(x)(Q_1(x)\rightarrow P_1(x)))]\rightarrow$$
$$\rightarrow(y)[(EP_1')(P_1'(y)\ \&\ A_n(P_1'))\rightarrow P_1(y)]\}.$$

這裏我們可把全稱號 (x) 移前,並應用公式(35),因而得

$$(P_1)\{[\mathrm{Sc}(P_1)\ \&\ (x)(Q_1)(A_n(Q_1)\ \&\ Q_1(x)\rightarrow P_1(x))]\rightarrow$$
$$\rightarrow(y)(P_1')(P_1'(y)\ \&\ A_n(P_1')\rightarrow P_1(y))\}.$$

---

1) 按至少應寫作 $(P_1)(A_n(P_1)\rightarrow\leqslant(P_1,\mathrm{Vg}))$,其實應按第三版的標以足碼的寫法(見 164 頁)才最合適—— 譯者註.

這個公式可借助於公式(22)而推出[1].

所給的例子已足以證明，要把層次演算改成一個足以得出高等數學的推理式的系統,引入可化歸性公理是很適當的. 至於借助於層次演算而把數學基礎完備地建立起來，這已經由懷特黑與羅素完成了[2].

§9. 對於層次演算的最後附註

就最後的外貌說來，羅素的層次演算這個邏輯公式已經很足以表示極複雜的邏輯關係,例如在實數論中出現的那些. 但我們還想再一次就這個邏輯的原則方面而討論一下.

建立層次邏輯的困難是在於:"一切性質""一切命題"這些概念,如果無限制地普遍使用起來,會得出一個循環的. 故層次邏輯的想法便是:我們把一個確定的個體域作爲基礎,並把一些涉及這域的客體的那些基本性質及基本關係作爲已給的. 再根據邏輯運算而引入其它的謂詞. 每個函詞便根據其定義方式且具有一定的層次. 因爲這演算在應用上是不足夠的，因此我們又求助於可化歸性公理.

但這個公理的內容意義是什麽呢?一點也不明顯,它完全不像在函詞演算的形式語言中所陳述的那些推理規則. 我們更可以說出可化歸性公理的更多不妥當的地方. 如果隨意的選取基本性質與基本關係,可化歸性公理顯然是不成立的. 因此在每一個具體情形之下，我們必須把基本謂詞系加以推廣使滿足可化歸性公理的要求. 這樣的推廣只靠可構造性的過程是不能達到的，因爲根據定義,對運算 &, $\vee$, $\overline{}$, $\rightarrow$, (x), (Ex) 說來,第一層次的謂詞是封閉的. 因此只有一個可能,卽第一層次的基本謂詞系必須假定是一

1) 這公式原來敍述有誤,今改正.要推出它時亦與公式(22)無關. 作者弄錯了——譯者註.

2) A. N. Whitehead and B. Russell, Principia Mathematica.

個絕對的總體，它們的總體既與實際上所給的定義無關，也根本與我們的可能定義式無關.

這個第一層次的函詞域又必須足夠廣泛，使得可化歸性公理成立. 如果我們認為，只當由兩謂詞所對應的集合彼此不同時，我們才認為該兩謂詞是不同的，亦即如果我們對演算採取集合論的觀點，那末可化歸性公理的要求便是：第一層次的函詞總體必須足夠廣大使得它包含了所有的函詞. 這樣，層次演算的想法便現出了不必要的複雜，我們可以馬上把同一型的所有函詞系都看作一個絕對的總體. 因此羅素的想法中只有第一點仍然可以保留，即我們需嚴格地區分個體函詞、個體函詞的函詞等等. 但特別的層次區分却須删除了. 如果我們把所有個體謂詞系當作一個固定的總體，而用涉及個體謂詞的總體而定義一個新的個體謂詞，這種做法可沒有邏輯的循環. 因為這並沒有引入新的個體謂詞，只不過是一個已確定的個體謂詞通過涉及所有個體謂詞而更精細地標記罷了. 至少，這種情形與加入可化歸性公理後的羅素層次邏輯並沒有本質上的區別. 在後者的演算中，我們亦可以如下地定義第一層次的謂詞，先定義一個第二層次的謂詞，然後再選取等價的第一層次的謂詞.

但是我們要問，在這樣的理解之下，詫論將怎樣呢？第一個詫論的出現，原因在於：把一個謂詞作為它自身的變目而使用. 在一函詞的空位處作這樣的代入現在仍然是不可能的，因為一函詞永遠比它的每一個變目具有更高的型.

其它兩個詫論具有與第一個詫論本質不同的特性. 第一個詫論對一般形式的（如我們所曾表述的那種）函詞演算引入了矛盾，但後兩個詫論對這演算說來只證明了某些斷言的不並眞性（不可調和性）. 第二個詫論所表示的是：

$$\mathrm{Bh}[(x)(\mathrm{Bh}(X)\rightarrow\overline{X})]$$

與

$$(X)[\mathrm{Bh}(X)\rightarrow\equiv(X,(Y)(\mathrm{Bh}(Y)\rightarrow\overline{Y}))]$$

之間的不可調和性,第三個詩論所表示的是:

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x),\ \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds}\ x)$$

以及

$$(P)\{(Ex)P(x)\rightarrow(Ex)[P(x)\ \&\ (y)(<(y,x)\rightarrow\bar{P}(y))]\}$$

之間的不可調和性. 而這些斷言中沒有一個是表示邏輯永眞公式的. 這些詩論根本與我們的演算無關,因此我們不再深入考慮它們.

這樣所得到的演算的最一般形式, 還需經過更精細的探究才能夠說它沒有問題. 如果我們只允許個體謂詞變元及相應的量詞,我們可以得到一個有明確範圍的、自身封閉的公式領域. 對於這個領域我們還可以提出判定問題.

一個關於邏輯的一般結構,不致引起可化歸性公理的困難的,可見於希爾柏脫對數學基礎所作的各探討中, 它們不久將一齊發表.

參 考 文 獻

關於數理邏輯的入門著作有:

Behmann, H.: Mathematik und Logik, Leipzig, 1927.

Carnap, R.: Abriss der Logistik, Wien, 1929.

Couturat, L.: L'algèbre de la logique, Paris, 1905.

Lewis, C. I. and Landford, C. H.: Symbolic Logic, New York, 1932.

Quine, W. V.: A System of Logistic, Cambridge (Mass.), 1934.

Russell, B.: 數理哲學導論(有中譯本).

Russell, B. and Whitehead A. N.: Principia Mathematica 中的導言部份.

對於進一步的研究有:

Hilbert, D. und Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik, I, 1934; II, 1939, Berlin.

Whitehead, A. N. und Russell, B.: Principia Mathematica, 2版, I, 1925; II 與 III, 1927.

舊有的一些書但迄今仍然有意義的,有:

Frege, G.: Begriffsschrift, Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, 1879.

Frege, G.: Die Grundlagen der Arithmetik, Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, 1884.

Frege, G.: Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Jena, 1893—1903.

Peano, G.: Notations de logique mathématique, introduction au Formulaire de Mathématiques, Turin, 1894.

Peano, G.: Formulaire de Mathématiques, 1895—1905.

Peirce, C. S.: Collected Papers, 由 C. Hartshorne 與 P. Weiss 所編輯 (迄今只出 I—IV 集).

Schröder, E.: Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), 3 册,

Leipzig, 1890—1905.

對於與邏輯有密切联系的集合論,我們介紹

Fraenkel, A.: Einleitung in die Mengenlehre, 3 版, Berlin, 1928.

對於邏輯方面的(十分龐大的)特殊文獻的完全目錄,這裏不能給出. 我們只介紹一本很有價値的著作

Church, A.: A Bibliography of Symbolic Logic (The Journal of Symbolic Logic, vol. **1**, 121—218 頁). 這是一本完備的依年代排列的所有 1935 年以前的數理邏輯的文獻的目錄 (譯者按, 1936 年以後的可參看 The Journal of Symbolic Logic 雜誌中每期的提要).

德中名詞對照表

Ableitung von Regeln und Formeln im Aussagenkalkül	命題演算中的規則與公式的推演
—— im Prädikatenkalkül	謂詞演算中的 ——
—— der Folgerungen aus gegebenen Axiomen im Aussagenkalkül	命題演算中由給定的公理而到結論的推演
—— im Prädikatenkalkül	謂詞演算中的 ——
—— im Stufenkalkül	層次演算中的 ——
Ableitungsregeln	推演規則
Allgemeine Urteile	全稱判斷
Allgemeingültigkeit, Problem der——im Aussagenkalkül	命題演算中的普遍有效性問題
——, im klassenkalkül	類演算中的 ——
——, im Prädikatenkalkül	謂詞演算中的 ——
Allzeich	全稱號
Anzahlbegriff, logische Einführung des	數目概念的邏輯地引入
Äquivalenzen des Aussagenkalküls	命題演算中的等值(價)式
Äquivalenz, mengentheoretische	集合論的等價性
Aristotelische Logik	亞里士多德邏輯
Assoziatives Gesetz für Konjunktion und Disjunktion	合取詞與析取詞的結合律
Aussagenkalkül	命題演算
Auswahlaxiom	選擇公理
Axiome des Aussagenkalküls	命題演算的公理
—— des engeren Prädikatenkalküls	狹義謂詞演算的公理
—— des Prädikatenkalküls der zweiten Stufe	第二層次謂詞演算的公理

—— des Stufenkalküls	層次演算的公理
Axiomensysteme der ersten und der zweiten Stufe	第一層次與第二層次的公理系統
Dedekindscher Schnitt	狄德金分割
Deutsche Buchstaben, Gebrauch der	德文字母的用法
Disjunktion	析取詞
Distributive Gesetze des Aussagenkalküls	命題演算中的分配律
Dualitätsprinzip des Aussagenkalküls	命題演算中的對偶原則
—— des Prädikatenkalküls	謂詞演算中的——
Durchschnitt	交集
Eineindeutige Zuordnung	一(對)一對應
Eliminationsregeln des Aussagenkalküls	命題演算中的消元規則
Eliminationsproblem des Prädikatenkalküls	謂詞演算中的消元問題
Entbehrlichkeit von logischen Verknüpfungen	邏輯聯結詞的可省性
Entscheidungsproblem	判定問題
Entweder —— oder	或——或
Erfüllbarkeit, Problem der	可滿足性問題
Ersetzungsregel	替換規則
Extensionalitätsaxiome	外延性公理
Formel, allgemeingültige	普遍有效的公式
——, Definition im Prädikatenkalkül	謂詞演算中公式的定義
——, erfüllbare	可滿足的公式
Gegenteil, Bildung des—— im Aussagenkalkül	命題演算中否定的作成
——, im Prädikatenkalkül	謂詞演算中 ——
Gleichzahligkeit von Prädikaten	謂詞的等數性

Griechische Buchstaben, Gebrauch der　希臘字母的用法
Grundformeln, logische　邏輯基本公式
Grundverknüpfungen, logische　邏輯基本聯結詞

Haubersches Theorem　浩伯定理

Identische Formeln　永眞公式
Identität, Prädikat der　恆等性謂詞
Immer richtige Aussagenverbindungen　永眞複合命題
Immer richtige Formeln des Klassenkalküls　類演算中的永眞公式
Implikation　蘊涵詞
Individuelle Zeichen　個別記號
Individuen　個體
Individuenbereich　個體域
Individuenvariable　個體變元
Induktion, vollständige　完全歸納法(數學歸納法)

Klammern, Ersparung von　括號的節省
Klammernzeichen　量詞記號
Klassenkalkül　類演算
Kommutatives Gesetz des Aussagenkalküls　命題演算中的可換律
Konjunktion　合取詞
Konstituenten　組成要素
Konvergenz, gewöhnliche und gleichmässige　尋常與一致收斂

Lateinische Buchstaben, Gebrauch der　拉丁字母的用法

Mannigfaltigkeit der Aussagenverbindungen　複合命題的總體
Menge aller Teilmengen　所有部分集合(子集合)的集合
——, geordnete　有序集

——, wohlgeordnete	良序集（整序集）
Mengenlehre	集合論
Normalform, konjunktive des Aussagenkalküls	命題演算中的合取範式
——, ausgezeichnete konjunktive	特異合取範式
——, disjunktive des Aussagenkalküls	命題演算中的析取範式
——, pränexe	前束範式
——, Skolemsche	斯科林範式
Obere Grenze, Satz von der	上確界定理
Ordnung einer Menge	一集合的次序
Paradoxien, logische	邏輯詩論
Partikuläre Urteile	特稱判斷
Pascalscher Satz	帕斯加定理
Prädikat	謂詞
Prädikatenkalkül, einstelliger	一元謂詞演算
——, engerer	狹義謂詞演算
——, erweiterter	廣義 ——
—— der zweiten Stufe	第二層次的謂詞演算
Prädikatenprädikate	謂詞謂詞
Prädikatenvariable	謂詞變元
Pradikatenzeichen	謂詞記號
Präfix	首標
Principia Mathematica	數學原理
Produkte, logische	邏輯積
Reduktionssätze zum Entscheidungsproblem	判定問題的化歸定理
Reelle Zahlen, Begründung der Theorie	實數論基礎

Reflexivität	自反性
Schema für "all" und "es gibt"	關於"一切"與"有些"的模式(規則)
Schlussfiguren	推理格式
Schlusschema	蘊涵規則(推理模式)
Seinszeichen	存在號
Sheffersche Strichverknüpfung	舍佛的豎記號
Stufenkalkül	層次演算
Summe, logische	邏輯和
Symmetrie	對稱
Teilmenge	子集(部分集)
Traditionelle Logik	傳統邏輯
Transitivität	可傳性
Typ einer Prädikatenvariable	謂詞變元的類型
Typentheorie, einfache und verzweigte	簡單的與分支的類型論
Umbenennungsregel für gebundenen Variablen	約束變元的改名規則
Umformung von Aussagenverbindungen	複合命題的變形
Unabhangigkeit der Axiome des Aussagenkalküls	命題演算公理的獨立性
—— der Prädikatenkalküls	謂詞演算公理的 ——
Variable für Aussagen, Individuen, Prädikate	命題變元,個體變元,謂詞變元
——, gebundene und freie	約束與自由變元
Vereinfachung von Aussagenverbindungen	複合命題的簡化
Vereinigungsmenge	併集
Vertauschungsregel für die Klammerzeichen	量詞的交換規則

中德名詞對照表

一 畫

一一對應 eineindeutige Zuordnung

三 畫

上確界 obere Grenze

子集 Teilmenge

四 畫

不矛盾性 Widerspruchsfreiheit

化歸定理 Reduktionssätze

公理 Axiom

公理系統 Axiomensystem

分劃 Schnitt

分配律 Distributive Gesetze

分支類型論 Verzweigte Typentheorie

五 畫

可換律 Kommutatives Gesetze

可傳性 Transitivität

可滿足性 Erfüllbarkeit

外延性公理 Extensionalitätsaxiome

永眞公式 identische (immer richtig) Formeln

六 畫

全稱號 Allzeichen

全稱判斷 allgemeine Urteile

合取詞 Konjunktion

合取範式 konjunktive Normalform

交集 Durchschnitt

自反性 Reflexivität

自由變元 freie Variable

有序集 geordnete Menge

存在號 Seinszeichen

七 畫

作用區域 Wirkungsbereich

判定問題 Entscheidungsproblem

否定 Negation, Gegenteil

完備性 Vollständigkeit

良序 Wohlordnung

良序集 Wohlgeordnete Menge

改名規則 Umbenennungsregeln

八 畫

命題 Aussage

命題演算 Aussagenkalkül

析取詞 Disjunktion

析取範式 disjunktive Normalform

恆等性 Identität
直謂的 prädikative

九　畫

客體 Gegenstand
首標 Präfix
前束範式 pränexe Normalform
約束變元 gebundene Variable

十　畫

個體 Individuen
個體域 Individuenbereich
個體變元 Individuenvariable
消元規則 Eliminationsregeln
消元問題 Eliminationsproblem
特稱判斷 Partikuläre Urteile
特異合取範式 ausgezeichnete konjunktive Normalform
函詞 Funktion

十一畫

基本公式 Grundformeln
推演 Ableitung
推演規則 Ableitungsregeln
規則 Regeln, Schema

十二畫

集合 Menge
——,有序 geordnete ——
——,良序 wohlgeordnete ——
集合論 Mengenlehre

量詞 Klammernzeichen (Quantoren)
普遍有效性 Allgemeingültigkeit
替換規則 Ersetzungsregeln
等價(值)式 Äquivalenz
數目概念 Anzahlbegriff
等數性 Gleichzahligkeit
結合律 Assoziatives Gesetze

十四畫

演算 Kalkül
——,命題 Aussagenkalkül
——,類 Klassenkalkül
——,狹義謂詞 engere Prädikatenkalkül
——,廣義謂詞 erweiterter Prädikatenkalkül
——,層次 Stufenkalkül
對偶原則 Dualitätsprinzip
詩論 Paradoxien

十五畫

層次 Stufe
層次演算 Stufenkalkül
選擇公理 Auswahlaxiom
範式 Normalform
——,合取 konjunktive ——
——,析取 disjunktive ——
——,前束 pränexe ——
——,特異合取 ausgezeichnete konjunktive ——
模式 Schema

十六畫

獨立性 Unabhängigkeit

聯結詞 Verknüpfung

謂詞 Prädikat

謂詞謂詞 Prädikatenprädikat

謂詞變元 Prädikatenvariable

謂詞演算 Prädikatenkalkül

十七畫

簡單類型論 einfache Typentheorie

十八畫

類型 Typ

類型論 Typentheorie

——,簡單 einfache ——

——,分支 verzweigte ——

類演算 Klassenkalkül

歸納法 Induktion

——完全 vollständige

十九畫

蘊涵詞 Implikation

蘊涵規則 Schlussschema

二十二畫

變元 Variable

——,自由 freie ——

——,約束 gebundene ——

變形 Umformung

德中人名對照表

Ackermann 阿克曼
Aristotels 亞里士多德

Behmann 貝曼
Bernays 伯爾奈斯
Boole 布爾
Bretanos 布雷太諾

Cantor 康托
Church 邱吉
Curry 克里

Dedekind 狄德金

Fraenkel 弗蘭克爾
Frege 弗雷格

Gentzen 堅欽
Gödel 哥德爾

Hauber 浩伯
Hilbert 希爾柏脫

Jevons 耶方斯

Kant 康德

Leibniz 萊布尼兹
Löwenheim 累文漢
Lukasiewicz 盧卡西維支

De Morgan 德莫干

Von Neumann 馮紐曼
Nicod 尼葛

Pascal 帕斯加
Peirce 皮爾斯

Russell 羅素

Schmidt 施密特
Scholz 施勒兹
Schröder 施累德
Sheffer 舍佛
Skolem 斯科林

Turing 杜令

Whitehead 懷特黑

Zermelo 蔡梅羅